AVERTISSEMENT : Il y a souvent plusieurs façons pour résoudre un problème. Nous n'en indiquons qu'une, et ce n'est pas nécessairement la plus facile, ni la plus rapide.

1. a) $f(t)=(5t+3)(2t-7)=10t^2-29t-21$

$$\left\{10t^2-29t-21\right\}=10\frac{2}{s^3}-29\frac{1}{s^2}-21\frac{1}{s}=\frac{20}{s^3}-\frac{29}{s^2}-\frac{21}{s}$$ avec P3 n=2, P2 et P1.

b) $g(t)=5t^3e^{-2t}+4t\cos(5t)$

Pour le premier terme, on utilise P20, $n=3$, $f(t)=5e^{-2t}$ puis P4 pour $f(t)$

Pour le deuxième terme, on prendra P11, $\omega=5$.

$$\left\{g(t)\right\}=(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{5}{s+2}\right)+4\frac{s^2-5^2}{\left(s^2+25\right)^2}$$

$$=\frac{30}{(s+2)^4}+\frac{4\left(s^2-25\right)}{\left(s^2+25\right)^2}$$

2.a) $$h(t)=\begin{cases}2 & \text{si } 0<t<4\\ 4-\dfrac{t}{2} & \text{si } 4<t<12\\ 0 & \text{si } t>12\end{cases}$$

Donc $h(t)=2u(t)+\left(2-\dfrac{t}{2}\right)u(t-4)+\left(\dfrac{t}{2}-4\right)u(t-12)$

b) Pour le premier terme, on utilisera P1.
Pour les deux autres, ce sera P21.

$$\left\{2u(t)\right\}=\frac{2}{s}$$

$a=4$, $g(t)=2-\dfrac{t}{2}$; $g(t+4)=-\dfrac{t}{2}$;

$$\left\{\left(2-\frac{t}{2}\right)u(t-4)\right\}=e^{-4s}\left(\frac{-1}{2s^2}\right)$$ avec P2

$a=12$, $g(t)=\dfrac{t}{2}-4$; $g(t+12)=\dfrac{t}{2}+2$;

$$\left\{\left(\frac{t}{2}-4\right)u(t-12)\right\}=e^{-12s}\left(\frac{1}{2s^2}+\frac{2}{s}\right)$$ avec P2 et P1

Finalement $$\left\{h(t)\right\}=\frac{2}{s}-\frac{e^{-4s}}{2s^2}+e^{-12s}\left(\frac{1}{2s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

3.a) $$F(s)=\frac{5s^2+22s-117}{2s^3+13s^2+96s+45}=\frac{4s+18}{s^2+6s+45}-\frac{3}{2s+1}$$

On complète le carré pour le premier terme : $s^2+6s+45=(s+3)^2+36$

$$F(s)=\frac{4s+18}{(s+3)^2+36}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+1/2}=\frac{4(s+3)}{(s+3)^2+36}+\frac{6}{(s+3)^2+36}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+1/2}$$

avec P9 et P8 pour les 2 premiers, $a=3,\ \omega=6$; puis P4 pour le dernier $a=1/2$

$${}^{-1}\{F(s)\}=4e^{-3t}\cos(6t)+e^{-3t}\sin(6t)-\frac{3}{2}e^{-t/2}$$

b) On utilise P22;

$$a=\frac{\pi}{2};\ F(s)=\frac{(3s-5)}{2s^2(s^2+25)}=\frac{-3s}{50(s^2+25)}+\frac{1}{10(s^2+25)}+\frac{3}{50}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s^2}$$

Pour avoir $f(t)$, on passe par P9, P27, P1 et P2 :

$$f(t)=\ {}^{-1}\left\{\frac{-3s}{50(s^2+25)}+\frac{1}{10(s^2+25)}+\frac{3}{50}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$=\frac{-3}{50}\cos(5t)+\frac{1}{50}\sin(5t)+\frac{3}{50}-\frac{t}{10}$$

$${}^{-1}\left\{\frac{(3s-5)e^{-\pi s/2}}{2s^2(s^2+25)}\right\}=f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{50}\cos(5t)-\frac{3}{50}\sin(5t)-\frac{1}{10}t+\frac{\pi}{20}+\frac{3}{50}\right)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

4. $y''+9y'+14y=2\delta(t-1)+\delta(t-2)$

$$\{y''+9y'+14y\}=\ \{2\delta(t-1)-\delta(t-2)\}$$

On pose $\{y\}=Y$, alors $\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y$ par P16, et

$\{y''\}=s^2\cdot Y-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot Y$ par P17.

$$\{y''\}+9\ \{y'\}+14\ \{y\}=\ \{2\delta(t-1)\}-\ \{\delta(t-2)\}$$

$s^2\cdot Y+9s\cdot Y+14Y=2e^{-s}-e^{-2s}$, avec P15, le premier $a=1$ et le deuxième $a=2$.

$$Y=\frac{2e^{-s}}{s^2+9s+14}-\frac{e^{-2s}}{s^2+9s+14}$$

Avec P22, le premier $a=1$ et le deuxième $a=2$;

pour le premier : $F_1(s)=\dfrac{2}{s^2+9s+14}=\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s+7}$

$$f_1(t)=\frac{2}{5}e^{-2t}-\frac{2}{5}e^{-7t}$$

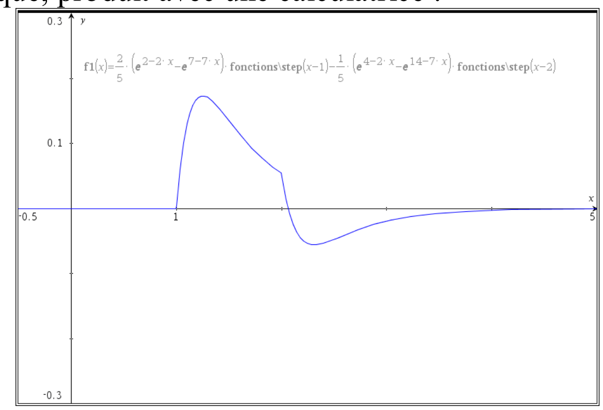
pour le deuxième : $F_2(s)=\dfrac{1}{s^2+9s+14}=\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{s+7}$

$$f_2(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-7t}$$

$$y(t) = {}^{-1}\{Y\} = f_1(t-1)\cdot u(t-1) - f_2(t-2)\cdot u(t-2)$$

$$y(t) = \frac{2}{5}\left(e^{-2t+2} - e^{-7t+7}\right)\cdot u(t-1) - \frac{1}{5}\left(e^{-2t+4} - e^{-7t+14}\right)\cdot u(t-2)$$

Voici le graphique, produit avec une calculatrice :



5. $(2x+3)y'' - 4xy' + 5y = 0$, avec $y(0) = 8$ et $y'(0) = 1$

a) Il y a une singularité en $x = -3/2$, alors qu'on développera autour de 0 à cause des conditions initiales. Donc $R = \dfrac{3}{2}$

L'intervalle de convergence est $\left]-3/2 ; 3/2\right[$.

b) On pose $y = \sum a_n x^n$, avec $a_0 = 8$ et $a_1 = 1$.

Alors $y' = \sum a_n n x^{n-1}$ et $y'' = \sum a_n n\cdot(n-1)x^{n-2}$.

On substitue dans l'équation différentielle :

$$2x\sum a_n n\cdot(n-1)x^{n-2} + 3\sum a_n n\cdot(n-1)x^{n-2} - 4x\sum a_n n x^{n-1} + 5\sum a_n x^n = 0$$

$$\sum 2a_n n\cdot(n-1)x^{n-1} + \sum 3a_n n\cdot(n-1)x^{n-2} - \sum 4a_n n x^n + \sum 5a_n x^n = 0$$

$$\sum 2a_{n+1}(n+1)\cdot n x^n + \sum 3a_{n+2}(n+2)\cdot(n+1)x^n - \sum 4a_n n x^n + \sum 5a_n x^n = 0$$

$$\sum\left(2a_{n+1}(n+1)\cdot n + 3a_{n+2}(n+2)\cdot(n+1) - 4a_n n + 5a_n\right)x^n = 0$$

Chaque coefficient doit être égal à 0, et on isole a_{n+2} :

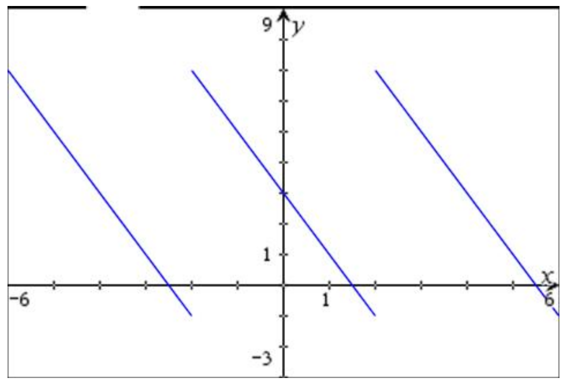
$$a_{n+2} = \frac{-\left(2a_{n+1}\cdot n\cdot(n+1) - a_n\cdot(4n-5)\right)}{3\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$; c'est la formule de récurrence.

c) On a que $a_0 = 8$ et $a_1 = 1$ et on calcule que $a_2 = \dfrac{-20}{3}$, $a_3 = \dfrac{77}{54}$, $a_4 = \dfrac{-167}{162}$, ce qui nous donne 5 coefficients non nuls.

$$y = 8 + x - \frac{20}{3}x^2 + \frac{77}{54}x^3 - \frac{167}{162}x^4 + \ldots$$

d) $1 \in \left]-3/2 ; 3/2\right[$, donc on peut utiliser la série trouvée pour évaluer $y(1) \approx 2,7284$

6.a) Voici le graphe de $f(x)$, tracé avec une calculatrice :



b) Si on translate notre fonction de 3 unités vers le bas, elle devient impaire ; les a_n sont donc tous nuls. Il faut compter $\frac{a_0}{2}$ (qui sera égal à 3) et les b_n.

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} 3 - 2x\, dx = 3$$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} (3-2x)\cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{8\cdot(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x) = 3 - \frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{8}{3\pi}\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right) + \ldots$$

c) On prend T_4, qui est semblable à la nôtre si on la multiplie par -1, pour inverser l'inclinaison, et qu'on la monte ensuite de 3 unités.

$P_T = 2\pi$, $P_f = 4$; $A_T = 2\pi$, $A_f = 8$.

Réflexion puis translation verticale de 3 unités vers le haut.

$$f(x) = 3 - \frac{8}{2\pi}T_4\left(\frac{2\pi}{4}x\right) = 3 - \frac{4}{\pi}T_4\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

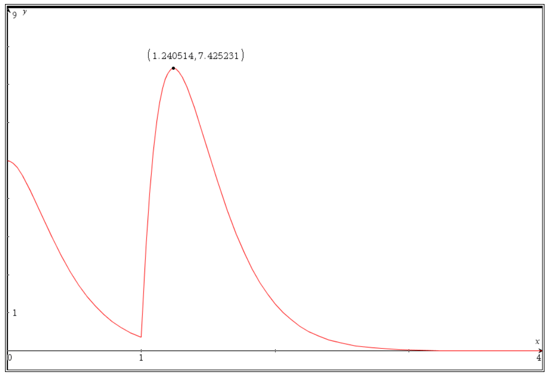
$$f(x) = 3 - \frac{4}{\pi}\cdot 2\left(\frac{1}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}x\right) + \ldots\right)$$

$$= 3 - \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right) - \ldots\right)$$

7.a) On résout l'équation différentielle $y'' + 8y' + 17y = 80\,\delta(t-1)$ avec la calculatrice (Laplace) et on obtient

$$y(t) = 80e^{4-4t}\sin(t-1)u(t-1) + 5e^{-4t}\cos(t) + 20e^{-4t}\sin(t)$$

b) On trace le graphe de $y(t)$ et on voit clairement que l'écart maximal se produit à $t=1,24$; la masse se situe alors à $y=7,425$:



8.a) On a $C=10^{-3}$, $L=15$, $R=10$ et $V=100\sin(3t)$

$$15\times10^{-3}\frac{d^2v_c}{dt^2}+10\times10^{-3}\frac{dv_c}{dt}+v_c=100\sin(3t)\text{, avec } v_c(0)=100 \text{ et } v_c'(0)=0$$

$$v_c(t)=104e^{-t/3}\cos(8.158t)-38.21e^{-t/3}\sin(8.158t)-4.005\cos(3t)+115.468\sin(3t)$$

b) $v_{c_{PERM}}(t)=-4.005\cos(3t)+115.468\sin(3t)$

Son amplitude est 115.537 volts.

c) $i(t)=10^{-3}vc'(t)$

$$i(t)=e^{-t/3}\left(-0.346\cos(8.158t)-0.836\sin(8.158t)\right)+0.346\cos(3t)+0.012\sin(3t)\text{ A}$$

Chantal Trottier
AUT-2012
Révisé décembre 2017