HIV-2019 DEVOIR 1 groupes 01 et 02
MAT-265 Enseignant : Gilles Picard

Vous devez faire ce devoir en équipes de 2 ou 3 et vous remettrez une copie manuscrite par équipe lors du sixième cours :
groupe 01 : 11 février groupe 02 : 12 février

Pour les numéros 4, 5, 6 et 8, **vous devez utiliser** la commande deSolve(…) de votre calculatrice pour faire résoudre les équations différentielles. Indiquez la syntaxe utilisée.
Les graphes, aux numéros 1, 4, 5 et 6, **doivent être produits et imprimés** avec le logiciel Nspire.

1- Soit l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}+3xe^{y}=y^{2}$

a) Produisez un champ de pentes pour cette équation en ajoutant les courbes solutions pour les conditions initiales suivantes : $y(1)=2$ et $y(0)=1$

- la fenêtre graphique doit être tracée pour x allant de -2 à 3 et y allant de -3 à 3
- les courbes solutions doivent être faites avec la méthode d'Euler et un pas de tracé de 0.01
- utilisez une valeur de 30 pour le paramètre « Champ Résolution »

b) On cherche à estimer la valeur de $y(2)$ en considérant uniquement la condition initiale $y(1)=2$. Si vous utilisez la méthode d'Euler avec 10 étapes, quel sera l'estimé cherché?

c) Combien d'étapes de la méthode d'Euler sont nécessaires pour estimer cette valeur de $y(2)$ avec deux bonnes décimales? Partez de votre réponse précédente et doublez le nombre d'étapes pour apprécier la précision de la réponse obtenue en b) . Continuez à doubler le nombre d'étapes jusqu'à ce que votre réponse ait 2 décimales de précision. Indiquez les différentes valeurs de n et les estimés correspondants.

2- Résolvez **manuellement** l'équation différentielle suivante.

$\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^{2}-2$. Donnez la variable y explicitement comme fonction de x.

(Considérez, au besoin, que $x+y>0$ pour vous aider avec les valeurs absolues)

Indice : un changement de variables approprié peut aider.

3- Résolvez **manuellement** l'équation différentielle suivante avec deux (2) des 4 méthodes vues au chapitre 2 (séparable, linéaire, homogène et Bernoulli). Éventuellement, réconciliez **manuellement** vos réponses.

$$\left(2y^{2}+4x^{2}\right)dx-xy\,dy=0 \quad \text{avec} \quad y(1)=-2.$$

4- Un parachutiste saute d'un avion à une altitude de 1200 m. La masse du parachutiste, avec son équipement, est 75 kg. On supposera que l'air offre une résistance qui est proportionnelle à la vitesse du parachutiste, avec une constante de proportionnalité de $k_1=14$ kg/s pendant la chute libre. Après 20 secondes, le parachute est ouvert, et la constante de proportionnalité devient $k_2=160$ kg/s. On suppose que le parachute se déploie instantanément quand le parachutiste tire la corde. **Utilisez** $g=9{,}81\,m/s^{2}$ et **prenez comme référentiel, pour la position, la hauteur par rapport au sol**. Donnez les fonctions solutions en mode « approx » et non en mode « exact ».

a) Posez une équation différentielle représentant ce mouvement pendant la chute libre. Déterminez la vitesse et la position du parachutiste pendant cette première phase de son saut.

b) À quelle vitesse notre homme tombe-t-il au moment où il tire la corde pour ouvrir son parachute? À quelle hauteur est-il rendu à ce moment-là?

c) Posez de nouveau une équation différentielle pour la portion de la chute avec parachute ouvert. Déterminez la vitesse et la position du parachutiste pendant cette deuxième phase de son saut..

d) À quelle vitesse arrive-t-il au sol, et combien de temps (depuis le début du saut) cela lui prend-il pour atteindre le sol?

e) Donnez les équations de la position, de la vitesse et de l'accélération pour toute la durée de la chute. Fournissez les graphes de ces 3 fonctions.

Le premier donnera l'accélération pendant toute la durée de la chute.

Le deuxième donnera la vitesse, pendant toute la durée de la chute.

Enfin, le troisième donnera la hauteur du parachutiste pendant toute la durée de sa chute.

5- On laisse tomber, du haut d'un édifice de 50 mètres (on est sur le bord du toit), un objet ayant une masse de $\frac{1}{4}$ kg; donc la vitesse initiale est nulle. (**utilisez** $g = \frac{98}{10} m/s^2$). On suppose une force de résistance de l'air qui vaut (en grandeur) $1/20$ fois le carré de la vitesse, donc $\frac{v^2}{20}$.

a) Dessinez un référentiel pour lequel **la position de l'objet correspond à sa hauteur** par rapport au sol. Posez une équation différentielle représentant le mouvement de l'objet (attention, la vitesse au carré est toujours positive).

Note : travailler avec des entiers peut aider et simplifier le travail (d'où le 98/10 et non 9.8)

b) Résolvez cette équation pour trouver la hauteur et la vitesse de l'objet en fonction du temps.

Note : la vitesse sera entre 0 et -7 m/s. **Justifiez ce fait avant même de résoudre** l'équation différentielle. Utilisez ce fait pour vous aider à obtenir une solution explicite pour la vitesse.

c) Donnez la hauteur, la vitesse et l'accélération de l'objet après 2 secondes de mouvement.

d) Après combien de temps et à quelle vitesse l'objet touche-t-il le sol?

e) Fournissez 2 graphes. Le premier donnera la vitesse et le deuxième donnera la hauteur de l'objet pendant toute la durée de sa chute.

6- On branche une résistance de 100 Ω en série avec un condensateur ayant une capacitance de 0,01 F et avec une source de $\frac{1}{100}\sin(5t)$ volts. Initialement, à $t = 0$, la tension du condensateur est nulle, donc $v_C(0) = 0$.

a) Posez l'équation différentielle de ce circuit et donnez sa solution, c'est-à-dire $v_C(\mathrm{t})$.

b) Fournissez un graphe de cette solution (en ajustant la fenêtre pour bien voir cette solution); déterminez la tension maximale dans ce condensateur et l'instant où cela se produit.

c) Quelle est l'amplitude de la solution en régime permanent (solution non graphique)?

7- Résolvez **manuellement** les équations différentielles suivantes :

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 41x = 0$, avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = -5$.

b) $9\frac{d^4y}{dt^4} + 24\frac{d^3y}{dt^3} + 103\frac{d^2y}{dt^2} + 62\frac{dy}{dt} + 10y = 0$.

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 10y = 29\cos(2x) - 20x$.

8- Un réservoir de 400 litres est rempli d'eau salée contenant initialement 10 kilogrammes de sel. On y déverse une solution contenant 200 grammes de sel par litre d'eau à un rythme de 5 litres par minute. Simultanément, le mélange s'échappe avec un débit de 6 litres par minute. Le volume net d'eau diminue donc de 1 litre par minute.

Aide : consultez la section 3.3 des notes de cours.

a) Posez et résolvez l'équation différentielle représentant cette situation.

b) Déterminez

i) la quantité de sel présente après 1 heure.

ii) la quantité de sel présente quand le réservoir ne contient plus que 150 litres

iii) après combien de temps y aura-t-il 30 kg de sel dans le réservoir

c) Déterminez la quantité maximale de sel que le réservoir contiendra et à quel moment cela se produira.