HIV-2019 DEVOIR 2 enseignant : Gilles Picard
MAT-265 groupes 01 et 02

Faites ce travail en équipes de 2 ou 3 personnes.

Vous devez remettre une **copie manuscrite** par équipe, **au début (à 13h30)** du cours 13 :
Gr. 01 : 1er avril, gr 02 : 2 avril. Aucun retard toléré. (note de 0 si retard)

Vous devez justifier vos réponses.

Quand vous calculez une transformée de Laplace, ou une transformée inverse, donnez les numéros des formules utilisées et identifiez les paramètres.

Les graphes doivent être produits et imprimés avec le logiciel TI-Nspire.

1- Trouvez les transformées de Laplace des fonctions suivantes à l'aide de votre table de transformées :

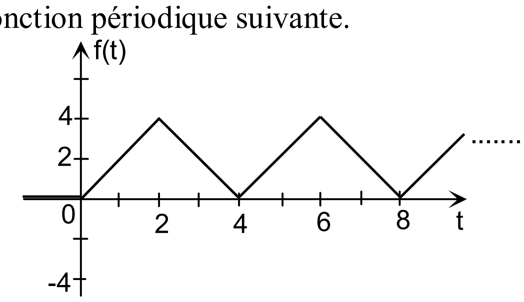
a) $f(t)=(t+3)^2\sin(3t)$ **b)** $g(t)=2t^3\cos(2t)-5+t^5$ **c)** $x(t)=5e^{-6t}u(t-3)$

d) $k(t)=\begin{cases} 2t & \text{si } 0<t<1 \\ 2 & \text{si } 1<t<3 \\ 8-3t & \text{si } t>3 \end{cases}$

i- écrivez d'abord la fonction $k(t)$ en une seule expression à l'aide de fonctions échelon-unité

ii- puis trouvez la transformée de Laplace de $k(t)$ à l'aide de la propriété P21

2- Considérons la fonction périodique suivante.



Montrez que sa transformée de Laplace est $\dfrac{2e^{2s}-2}{s^2(e^{2s}+1)}$

3- Trouvez, à l'aide de votre table, les transformées de Laplace inverses de :

a) $F(s)=\dfrac{3s^3+34s^2+103s+66}{s^4+14s^3+73s^2+180s+200}$ **b)** $G(s)=\dfrac{2s-e^{-3s}}{s^2-4}$

c) $H(s)=\dfrac{-11s-34}{9s^3-6s^2+27s-18}$ **d)** $\mathrm{Y}(s)=\dfrac{4s+1}{(s+5)^4}$

4- Soit l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5y=4\delta(t-\pi) \quad \text{avec } y(0)=\tfrac{1}{2} \text{ et } y'(0)=0$$

a) Résolvez à l'aide des transformées de Laplace cette équation.

b) Fournissez le graphe de la solution pour t allant de 0 à 10.

c) Quelle est l'amplitude (arrondie à 4 décimales) de $y(t)$ lorsque $t>\pi$?

Expliquez d'où vient votre réponse

5- Un circuit électrique est constitué seulement d'une bobine, d'une résistance et d'un condensateur. La bobine a une inductance de 0,1 henry, la résistance est de 10 ohms, alors que le condensateur a une capacitance de $400\mu F$. On considère que $v_C(0)=0{,}1$ volt et $i(0)=0$ ampère

a) Posez l'équation qui correspond à ce circuit. Faites-la résoudre par votre calculatrice à l'aide de la commande « solved » du programme ETS_specfunc. Donnez $v_C(t)$.

b) Fournissez le graphe de cette solution. Utilisez un intervalle permettant de bien voir la solution.

6- On suspend une masse de 1/2 kg à un ressort qui a une constante de rappel de 10 N/m. Supposons une force d'amortissement valant 2 fois la vitesse.

On descend l'objet 20 cm sous le point d'équilibre, puis on lui donne une vitesse initiale de $-3\ {}^{m}\!/_{s}$.

Ces conditions initiales sont les mêmes pour chaque sous-question qui suit.
Considérons, pour les parties a) et b) de ce problème, qu'il n'y a pas de force extérieure sur le système.
Utilisez la commande « solved » du programme ETS_specfunc pour résoudre les équations différentielles.

a) Posez et résolvez l'équation différentielle qui correspond à ce mouvement; déterminez la position $\mathrm{y}(t)$ de l'objet en fonction du temps. Fournissez le graphe de $\mathrm{y}(t)$ pour bien faire ressortir le mouvement de la masse.

b) Quelle devrait être la valeur du coefficient d'amortissement pour que le résultat soit un amortissement critique?

c) Considérons maintenant qu'on applique une force constante de 10 Newton pendant les 4 premières secondes seulement du mouvement. Posez et résolvez l'équation du mouvement; fournissez un graphe de la solution. Y a-t-il oscillations autour du point d'équilibre? Décrivez le mouvement résultant.

d) Considérons maintenant qu'on applique plutôt une force de $f(t) = 8\sin(2\,t)$. Posez et résolvez la nouvelle équation. Fournissez un graphe de la solution. Donnez le régime permanent et son amplitude.

e) Pour une raison technique, la force indiquée en d) tombe en panne quand t est entre 2π et 4π . Donc on a la même fonction qu'en d) sauf que $f(t) = 0$ si $2\pi < t < 4\pi$.

i) Posez une nouvelle équation, en utilisant des fonctions échelon-unité, pour tenir compte de cette contrainte.

ii) Résolvez cette nouvelle équation; fournissez la solution obtenue avec le logiciel (imprimez la feuille de calcul) et fournissez un graphe montrant bien toutes les étapes du mouvement.

iii)Quel sera le régime permanent dans cette situation?

7- Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients variables suivante :

$$\left(1+x^2\right)y'' + 4y = 0 \text{, avec les conditions initiales } y(1) = 0 \text{ et } y'(1) = 2.$$

a) Résolvez cette équation différentielle par série de puissances, et donnez la solution avec les 6 premiers termes non nuls.

Vous devez fournir la formule de récurrence et le détail de vos calculs.

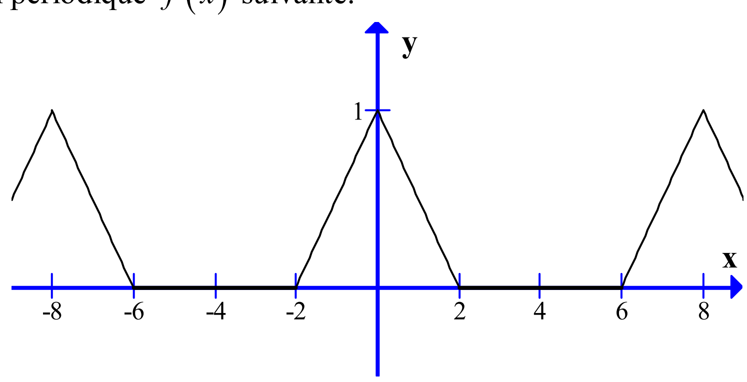
b) Quel est l'intervalle de convergence de la série trouvée en a)?

c) Fournissez le graphique de la série solution pour $y(x)$, en utilisant les 6 premiers termes trouvés en a), avec x **dans l'intervalle de convergence**.

d) Donnez un estimé (arrondi à 5 décimales) de la valeur de $y(2)$ en utilisant la solution trouvée en a).

e) Appliquez la méthode de Runge-Kutta sur votre calculatrice pour estimer $y(2)$. Indiquez le système d'équations d'ordre 1 utilisé et donnez votre estimé de $y(2)$ avec 5 décimales. Vous prendrez un *Pas de tracé* de 0,1 et une *Tolérance d'erreur* de 0,001.
N'oubliez pas de fixer *Début du tracé*= 1 et *fin du tracé* = 2 pour mieux contrôler l'erreur globale.

8- Considérez la fonction périodique $f(x)$ suivante.



a) Calculez la série de Fourier de cette fonction périodique. Fournissez les intégrales à évaluer. Donnez une somme partielle contenant 5 termes non nuls.

b) Fournissez un graphique de la fonction périodique et de la somme partielle trouvée en a) pour x allant de -12 à 12.