

AVERTISSEMENT : Voici un exemple d'examen final basé sur celui de la session HIV-2012. Il est distribué à titre indicatif. L'examen que vous aurez pourra être plus long ou plus court, plus difficile ou plus facile que celui-ci. Il est possible que certains sujets traités ici ne le soient pas dans votre examen. À l'inverse, certains sujets non traités ici pourraient faire l'objet de questions dans votre examen final.

Question 1 (10 points)

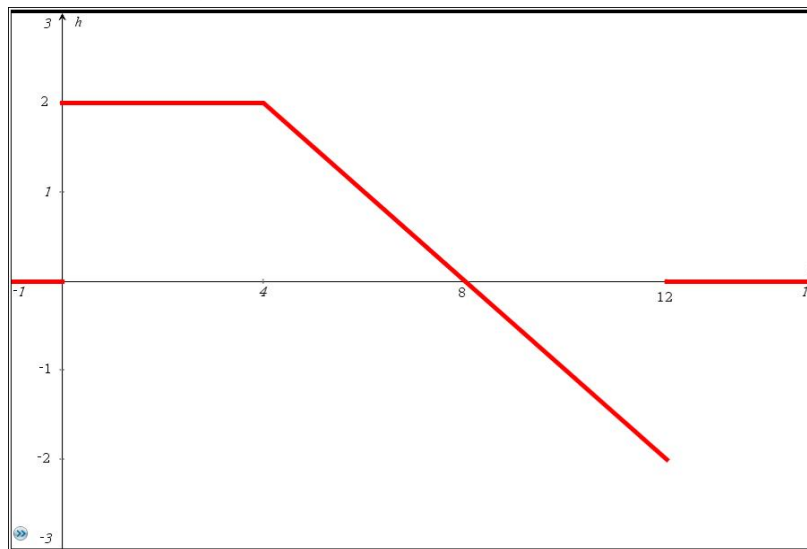
Calculez la transformée de Laplace des fonctions qui suivent à l'aide de la table et des propriétés introduites en cours. Indiquez quelles propriétés vous utilisez.

a) $f(t) = (5t + 3) \cdot (2t - 7)$

b) $g(t) = 5t^3 e^{-2t} + 4t \cos(5t)$

Question 2 (10 points)

Considérons la fonction $h(t)$, dont le graphe est présenté ici.



a) Exprimez la fonction $h(t)$ à l'aide de la fonction échelon-unité.

b) Déterminez la transformée de Laplace de $h(t)$ à l'aide de la table de transformées de Laplace. Indiquez quelles propriétés vous utilisez.

Question 3 (10 points)

Déterminez la transformée de Laplace inverse des expressions suivantes en utilisant la table et les propriétés introduites dans le cours. Indiquez quelles propriétés vous utilisez.

a) $F(s) = \frac{5s^2 + 22s - 117}{2s^3 + 13s^2 + 96s + 45}$

b) $G(s) = \frac{(3s - 5)e^{-\pi s/2}}{2s^2(s^2 + 25)}$

Question 4 (15 points)

Résolvez l'équation différentielle suivante à l'aide des transformées de Laplace.

$$y'' + 9y' + 14y = 2\delta(t-1) - \delta(t-2), \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0.$$

Indiquez quelles propriétés vous utilisez.

Tracez le graphe de la solution $y(t)$.

Question 5 (15 points)

Soit l'équation différentielle $(2x+3)y'' - 4xy' + 5y = 0$, avec $y(0) = 8$ et $y'(0) = 1$, à résoudre par séries de puissances.

- Donnez l'intervalle de convergence de la série de puissances.
- Donnez la formule de récurrence de la série.
- Donnez la solution de l'équation différentielle, avec les 5 premiers termes non nuls.
- Estimez $y(1)$ avec la solution obtenue en c).

Question 6 (15 points)

Considérons la fonction $f(x) = 3 - 2x$ si $-2 < x < 2$, périodique, de période 4.

- Tracez le graphe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-6; 6[$.
- Calculez la série de Fourier de $f(x)$ en évaluant les coefficients à l'aide des intégrales.
- Trouvez encore une fois la série de Fourier de $f(x)$, mais cette fois-ci en utilisant la table des séries de Fourier.

Question 7 (10 points)

Un système masse-ressort conduit à l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 8y' + 17y = 80\delta(t-1), \text{ avec } y(0) = 5 \text{ et } y'(0) = 0$$

- Donnez la position $y(t)$.
- À quel moment l'écart entre la position et l'équilibre est-il maximal? Quelle est la position à ce moment-là?
Note : Vous pouvez utiliser l'environnement graphique de votre TI pour trouver ces valeurs. Fournissez alors le graphe.

Question 8 (15 points)

Un circuit électrique est constitué d'un condensateur de $10^{-3}F$, d'une bobine de $15H$, d'une résistance de 10Ω et d'une source de $100\sin(3t)V$.

On considère que $v_C(0) = 100$ et $i(0) = 0$.

- Posez l'équation différentielle qui modélise ce circuit, et donnez sa solution $v_C(t)$.
- Quel est le régime permanent de $v_C(t)$? Quelle est son amplitude?
- Donnez le courant $i(t)$ dans le circuit.