MAT-265 **Solutions examen intra de pratique**

1- $\frac{dy}{dx} - xy = 3x$ par linéaire $u = e^{\int -x\,dx} = e^{-x^2/2}$ $\Rightarrow$ $y \cdot e^{-x^2/2} = 3\int x e^{-x^2/2} dx + C$

$y \cdot e^{-x^2/2} = -3e^{-x^2/2} + C$ $\boxed{\Rightarrow \quad y = -3 + Ce^{x^2/2}}$

ou $\frac{dy}{dx} = x\,y + 3x = x\,(y+3)$ séparable $\frac{dy}{y+3} = x\,dx \Rightarrow \ln(y+3) = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y + 3 = k\,e^{x^2/2}$

Avec la TI, deSolve($y' - xy = 3x, x, y$) donne la même réponse (même forme)

2- Après avoir fait tracer les 3 champs de direction par la TI, on obtient :

a) #1 **b)** #3 **c)** #2

3- a) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = (t+1)x^3$ Bernoulli avec $P(t) = \frac{1}{t}$ $Q(t) = t+1$ et $n = 3$

Posons $v = x^{-2}$ $\Rightarrow \frac{dv}{dt} - 2v \cdot \frac{1}{t} = -2(t+1)$ linéaire ordre 1

donc $u = e^{\int -\frac{2}{t}dt} = e^{-2\ln t} = \frac{1}{t^2}$ et $v \cdot \frac{1}{t^2} \int -\frac{(2t+2)}{t^2} dt + C = \int -\frac{2}{t} - 2t^{-2} dt + C$

$v \cdot \frac{1}{t^2} = -2\ln(t) + \frac{2}{t} + C$ $\boxed{v = -2t^2\ln(t) + 2t + ct^2 = \frac{1}{x^2}}$

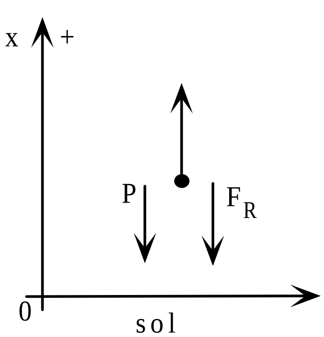
b) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \int -\frac{4}{t} dt = -4\ln(t) + C$

$x'(1) = 2 \Rightarrow 2 = -4\ln(1) + C \Rightarrow C = 2$

$\frac{dx}{dt} = -4\ln(t) + 2 \Rightarrow x = \int -4\ln(t) + 2\,dt = -4[t\ln(t) - t] + 2t + C \Rightarrow x = -4t\ln(t) + 6t + C$

$x(1) = 5 \Rightarrow 5 = -4\ln(1) + 6 + C \Rightarrow C = -1$ $\boxed{x(t) = -4t\ln(t) + 6t - 1}$

4- a)



$F = ma \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -5v - mg$ avec $v(0) = 20\,m/s$

ici $m = 5$ *et* $g = 10$ donc $5\frac{dv}{dt} = -5v - 5\cdot 10$

$\frac{dv}{dt} = -v - 10$ ce qui donne $\frac{dv}{dt} + v = -10$

$u = e^{\int 1\,dt} = e^t$ donc $v \cdot e^t = \int -10e^t\,dt + C$

$v = -10 + Ce^{-t}$ mais $v(0) = 20$ ce qui donne $C = 30$

$v(t) = -10 + 30e^{-t}$ et $x(t) = \int -10 + 30e^{-t} dt = -10t - 30e^{-t} + C$

avec $x(0) = 0$ on trouve $C = 30$

on obtient : $\boxed{x(t) = -10t - 30e^{-t} + 30}$

b) plus haut point lorsque $v = 0 \quad \Rightarrow \quad -10 + 30e^{-t} = 0$

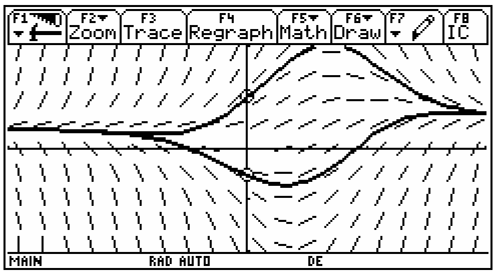
$\Rightarrow 30e^{-t} = 10 \quad$ donc $\quad e^{-t} = 1/3 \quad \Rightarrow \quad t = -\ln(1/3)$

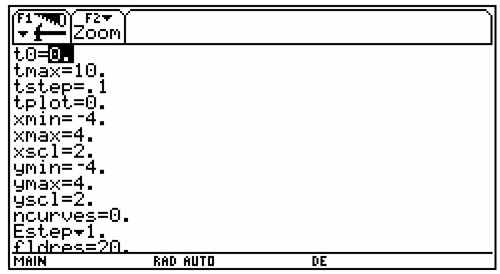
$t = 1.0986$ secondes et $\boxed{x\,(1.0986) = 9.0137 \text{ mètres}}$

c) distance parcourue en 2 secondes $= 9.0137\,m + \left(9.0137 - x(2)\right)$ puisque l'objet a commencé à descendre

$\boxed{= 9.0137 + 3.0738 = 12.0875 \text{ mètres}}$

5- Vous voyez sur l’écran ci-dessous les deux courbes solutions demandées ainsi qu’un écran montrant les paramètres utilisés pour produire ce graphique. Assurez-vous d’avoir choisi « Euler » et non « RK » pour l’option « Solution Method » accessible via la touche F1, en choisissant « Format ».





6- a) $\dfrac{1}{100}\dfrac{di}{dt} + 10i = 180e^{-100t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{di}{dt} + 1000i = 18000e^{-100t} \text{ avec } i(0) = 0}$

b) Avec deSolve($i' + 1000i = 18000e \wedge (-100t)$ and $i(0) = 0, t, i$) on obtient la solution :

$i(t) = 20e^{-1000t}\left(e^{900t} - 1\right)$ ce qui donne $i(t) = 20e^{-100t} - 20e^{-1000t}$

Pour trouver le maximum, on passe par la dérivée

$$\frac{di}{dt} = -2000e^{-100t} + 20000e^{-1000t} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-900t} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln(1/10)}{-900} = 0.002558 \text{ secondes}$$

$\boxed{i\,(0.002558427) = 13.9367 \text{ ampères}}$

7- $\left(D^2 + 4D - 5\right)y = 4x - 3e^{-5x} \qquad (D+5)(D-1)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_c = C_1e^{-5x} + C_2e^x$

Posons $\quad y = L_1e^{-5x} + L_2e^x$

$$\begin{aligned} L_1'e^{-5x} + L_2'e^x &= 0 \\ -5L_1'e^{-5x} + L_2'e^x &= 4x - 3e^{-5x} \end{aligned}$$

$$L_1' = -\frac{4}{6}xe^{5x} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L_1 = -\frac{2}{3}\frac{e^{5x}}{5}\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad L_1 = -\frac{2}{15}xe^{5x} + \frac{2}{75}e^{5x} + \frac{1}{2}x$$

$$L_2' = \frac{2}{3}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-6x} \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{-2}{3}e^{-x}\left(x - \frac{1}{-1}\right) + \frac{1}{12}e^{-6x}$$

$$y = L_1e^{-5x} + L_2e^x \quad = -\frac{2}{15}x + \frac{2}{75} + \frac{1}{2}xe^{-5x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{1}{12}e^{-5x}$$

$$\boxed{y_{gen} = C_1e^{-5x} + C_2e^x - \frac{4}{5}x - \frac{16}{25} + \frac{1}{2}xe^{-5x}}$$

8- $y=-\frac{1}{4}x^2+4 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{1}{2}x$ on replace dans l'équation : $\left(-\frac{1}{2}x\right)^2+x\left(-\frac{1}{2}x\right)\overset{?}{=}-\frac{1}{4}x^2+4$

$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{4}x^2\neq-\frac{1}{4}x^2+4$ donc ce n'est pas solution

9- $\frac{dx}{dt}=x+t-xt=f(t,x)$ mettre en mémoire sur la TI

$x(0)=2=x_0$

On utilisera la variable u comme variable d'intégration pour éviter la confusion avec la borne supérieure de l'intégrale qui sera t.

$$x_1=x_0+\int_0^t f(u,x_0)\,du=2+\int_0^t f(u,2)\,du=2+\int_0^t(2+u-2u)\,du=2+2t-\frac{t^2}{2}$$

$$x_2=x_0+\int_0^t f(u,x_1|t=u)\,du=2+\int_0^t((2+2u-\frac{u^2}{2})+u-(2+2u-\frac{u^2}{2})u)\,du=2+2t+\frac{t^2}{2}-\frac{5}{6}t^3+\frac{t^4}{8}$$

10- $\left(D^2+4D-5\right)y=4x-3e^{-5x} \qquad (D+5)(D-1)y=0 \quad\Rightarrow\quad y_c=C_1e^{-5x}+C_2e^x$

$y_p=Ax+B+Ce^{-5x}$ après modification $y_p=Ax+B+Cxe^{-5x}$

Après substitution de ce candidat dans l'équation de départ on obtient :

$\boxed{4x-3e^{-5x}=0+-6Ce^{-5x}+\left(4A-5B\right)-5Ax} \quad\Rightarrow\quad C=1/2 \qquad A=-4/5 \qquad B=-\frac{16}{25}$

$y_p=-\frac{4}{5}x-\frac{16}{25}+\frac{1}{2}x\,e^{-5x} \quad\Rightarrow\quad y=C_1e^{-5x}+C_2e^x-\frac{4}{5}x-\frac{16}{25}+\frac{1}{2}xe^{-5x}$

$y'=-5C_1e^{-5x}+C_2e^x-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}e^{-5x}-\frac{5}{2}xe^{-5x}$

$y(0)=C_1+C_2-\frac{16}{25}=0 \qquad y'(0)=-5C_1+C_2-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=0$

en résolvant on trouve : $C_1=\frac{17}{300}$ et $C_2=\frac{7}{12}$

solution est $\boxed{y=\frac{17}{300}e^{-5x}+\frac{7}{12}e^x-\frac{4}{5}x-\frac{16}{25}+\frac{1}{2}xe^{-5x}}$

11- Comme $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}}$ doivent être continues sur une région R du plan contenant le point correspondant à la condition initiale, il n'y aura pas de problèmes ici en autant que $x^2-y>0 \quad\Rightarrow\quad y<x^2$

Donc aucun problème si le point (x_0,y_0) est choisi tel qu'il se retrouve sous la parabolle $y=x^2$

12- a) $\left(D^2+6D+25\right)x=2\sin^2(4t)-3(t-1)$

$$-\frac{6\pm\sqrt{36-100}}{2}=-3\pm\frac{8i}{2}=-3\pm4i \quad\Rightarrow\quad y_c=e^{-3t}\left(C_1\sin(4t)+C_2\cos(4t)\right)$$

$$\boxed{y_p = A\sin^2(4t) + B\sin(4t)\cos(4t) + C\cos^2(4t) + Dt + E}$$ pas d'exceptions

b) $\left(D^3 - 4D\right)y = x^2 - 4x\,e^{2x} + 17x\cos(x)$

$D\left(D^2 - 4\right) = 0 \quad \Rightarrow \qquad y_c = C_1 + C_2\,e^{2x} + C_3\,e^{-2x}$

$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dx\,e^{2x} + E\,e^{2x} + Fx\cos(x) + G\cos(x) + Hx\,\sin(x) + I\,\sin(x)$

on doit modifier le candidat car il y a problèmes avec les termes en e^{2x} et avec le polynôme

$$\boxed{y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dx^2e^{2x} + E\,x\,e^{2x} + Fx\cos(x) + G\cos(x) + H\,x\sin(x) + I\,\sin(x)}$$

Gilles Picard

Octobre 2006