HIV-2024 DEVOIR 2 groupe 06
MAT-265 enseignant: Gilles Picard

Vous devez faire ce devoir **avec les équipes déjà formées (voir SIGNETS ou Moodle)**.
Vous remettrez une copie PDF par équipe, via Moodle, au plus tard à 13h00 le 13 février 2024
Lisez bien les consignes dans l'onglet «Devoirs et tests» de votre site Moodle de cours.
Les graphes demandés doivent être **produits et imprimés (PDF) avec le logiciel Nspire.**

Résoudre manuellement une équation différentielle signifie utiliser les techniques vues dans ce cours, sans utiliser la commande deSolve. Vous pouvez évidemment, comme on l'a fait au cours, utilisez votre calculatrice Nspire pour effectuer différents calculs, incluant, entre autres, le calcul des dérivées et des intégrales, des simplifications algébriques, la résolution d'équations et de systèmes d'équations etc. Vous devez indiquer quelles opérations sont faites avec la calculatrice et les résultats obtenus.

Pour les problèmes d'applications physiques, **vous devez utiliser la commande deSolve** pour obtenir directement la solution des équations différentielles. **Indiquez la syntaxe utilisée**.

1- (35 points) Un objet ayant une masse de 250 gr est lancé vers le haut d'une hauteur de 30 m, avec une vitesse initiale de $25 m/s$. Utilisez $g = 9{,}81 m/s^2$

Pour a), b), c), d) et e), on suppose une force de résistance de l'air qui vaut, en grandeur, $\frac{4}{25}$ fois la vitesse.

Utilisez et dessinez un référentiel où la position de l'objet est sa hauteur par rapport au sol. Posez une équation différentielle pour ce mouvement. Résolvez-la.

a) Donnez la hauteur, la vitesse et l'accélération de l'objet après 3 secondes de mouvement.

b) Quelle sera la hauteur maximale atteinte par cet objet? Après combien de temps sera-t-elle atteinte?

c) Quelle serait la vitesse-limite théorique de l'objet en redescendant? (Si le sol n'est pas là…)

d) Après combien de temps l'objet touche-t-il le sol? À quelle vitesse?

e) Fournissez un graphe pour la vitesse et un autre graphe pour la hauteur de l'objet pendant la durée de ce mouvement.

f) Maintenant, on suppose que la force de résistance vaut *k* fois la vitesse (on oublie le $\frac{4}{25}v$),

- i - déterminez la valeur de *k* pour que la vitesse-limite théorique en redescendant soit de $12 m/s$?
- ii- déterminez une nouvelle valeur de *k* pour que la hauteur maximale de l'objet soit atteinte après exactement 1 seconde? (la hauteur maximale sera différente de celle trouvée en b)). Quelle sera cette hauteur maximale?

2- (30 points) On laisse tomber, du haut d'un édifice de 50 mètres (on est sur le bord du toit), un objet ayant une masse de $\frac{1}{4}$ kg; donc la vitesse initiale est nulle. (**utilisez** $g = \frac{98}{10} m/s^2$). On suppose une force de résistance de l'air qui vaut (en grandeur) $1/20$ fois le carré de la vitesse, donc $\frac{v^2}{20}$.

a) Dessinez un référentiel pour lequel **la position de l'objet correspond à sa hauteur** par rapport au sol. Posez une équation différentielle représentant le mouvement de l'objet (attention, la vitesse au carré est toujours positive).

<u>Note</u> : travailler avec des entiers peut aider et simplifier le travail (d'où le 98/10 et non 9.8)

b) Résolvez cette équation pour trouver la hauteur et la vitesse de l'objet en fonction du temps.

<u>Note</u> : la vitesse sera entre 0 et -7 m/s. **Justifiez ce fait avant même de résoudre** l'équation différentielle. Utilisez ce fait pour vous aider à obtenir une solution explicite pour la vitesse.

c) Donnez la hauteur, la vitesse et l'accélération de l'objet après 2 secondes de mouvement.

d) Après combien de temps et à quelle vitesse l'objet touche-t-il le sol?

e) Fournissez 2 graphes. Le premier donnera la vitesse et le deuxième donnera la hauteur de l'objet pendant toute la durée de sa chute.

3- (20 points) On branche en série une résistance de 800 Ω, un condensateur ayant une capacitance de 500 μF et avec une source de $\frac{7}{20}\sin(12t)$ volts. Initialement, à $t=0$, la tension du condensateur est de 0,2 volts, donc $v_C(0)=0.2$.

a) Posez l'équation différentielle de ce circuit et donnez sa solution, c'est-à-dire $v_C(\mathrm{t})$.

b) Fournissez un graphe de cette solution; ajustez la fenêtre pour bien voir cette solution.

c) Déterminez la tension maximale dans ce condensateur et l'instant où cela se produit (valeurs arrondies à 4 décimales).

d) Quelle est l'amplitude de la solution en régime permanent ? (solution non-graphique et valeur arrondie à 6 décimales)

e) Donnez le courant $i(t)$ circulant dans ce circuit.

4- (40 points) Résolvez **manuellement** les équations différentielles suivantes :

a) $\frac{d^2x}{dt^2}+10\frac{dx}{dt}+24x=0$ avec $x(0)=3$ et $x'(0)=-5$.

b) $4\frac{d^4y}{dt^4}-12\frac{d^3y}{dt^3}+21\frac{d^2y}{dt^2}-36\frac{dy}{dt}+27y=0$.

c) $\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}+10y=2xe^{-3x}+e^x$.

d) $y''+9y=3\cos(2x)-5x$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

5- (25 points) Un réservoir de 500 litres est rempli d'eau salée contenant initialement 20 kilogrammes de sel. On y déverse une solution contenant 200 grammes de sel par litre d'eau à un rythme de 4 litres par minute. Simultanément, le mélange s'échappe avec un débit de 5 litres par minute. Le volume net d'eau diminue donc de 1 litre par minute. (aide : voir pages 109-110 des notes de cours)

a) Posez et résolvez l'équation différentielle représentant cette situation. Fournissez un graphe de la quantité de sel dans le réservoir entre le moment initial ($t=0$) et le moment où le réservoir est vide.

b) Déterminez

i) la quantité de sel présente après 1 heures.

ii) la quantité de sel présente quand le réservoir ne contient plus que 150 litres

iii) après combien de temps y aura-t-il 30 kg de sel dans le réservoir

c) Déterminez la quantité maximale de sel que le réservoir contiendra et à quel moment cela se produira (réponses arrondies à 4 décimales).