COMMENT FAIT-ON POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE?

1- Équations différentielles d'ordre un et quelques fonctions personnalisées.

2- Équations différentielles d'ordre deux.

3- Équations différentielles d'ordre supérieur à deux.

1. Équations différentielles d'ordre un et quelques fonctions personnalisées.

On peut se servir de la TI pour résoudre symboliquement les équations différentielles d'ordre un et d'ordre deux. En effet, la commande « deSolve » permet de résoudre la plupart des équations différentielles du premier ordre de types séparables, linéaires, homogènes, Bernoulli, exactes et celles qui possèdent un facteur intégrant qui ne dépend que d'une variable, de même que les équations linéaires du second ordre (particulièrement à coefficients constants), qui sont résolues par la méthode de variation des paramètres. On peut ou non avoir des conditions initiales; on peut même avoir des conditions aux frontières.
Nous allons illustrer tout cela en utilisant la TI pour résoudre certaines équations différentielles.

Exemple 1 : Soit à résoudre $\frac{dy}{dx}+2y=\sin(x)$.

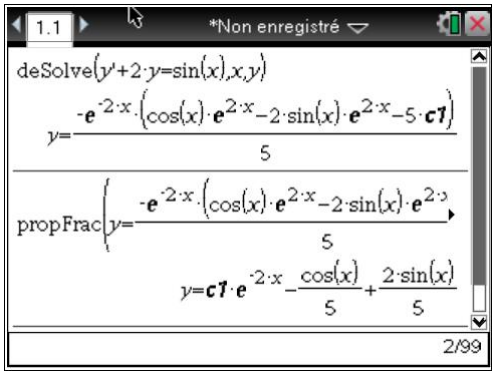
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Il est important de distinguer la variable dépendante de la variable indépendante. Ici nous avons la dérivée de la variable y par rapport à la variable x : x est donc la variable indépendante et y, la dépendante. Plutôt que d'écrire $\frac{dy}{dx}+2y=\sin(x)$, nous aurions pu écrire $y'+2y=\sin(2x)$ puisque le « y' » signifie la dérivée de y par rapport à la variable indépendante, qui est x; c'est cette notation qu'il faut utiliser pour les TI. Sur la calculatrice, le ['] s'obtient dans la palette ?!▸.

La commande « de Solve », qu'on obtient de menu-[Analyse]-[Résolution d'équation différentielle], possède la syntaxe suivante :

deSolve(équation différentielle, variable indépendante, variable dépendante)

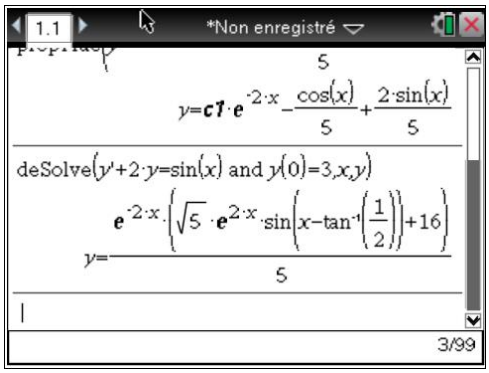
Souvent la TI met tout sur un dénominateur commun et met e^{-2x} en évidence, ce qui n'est pas toujours souhaitable. La commande « propFrac » est alors utile pour séparer les termes; on trouve cette commande via menu-3-9-1 (Algèbre, Outils fractions, Fraction propre).

La constante arbitraire réelle ***c1*** vient nous rappeler qu'il n'y avait pas de condition initiale.

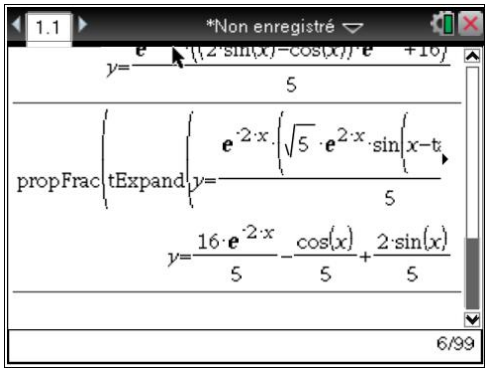


Ajoutons une condition initiale, disons $y(0)=3$. On insère cette condition initiale immédiatement après l'équation différentielle, avec un AND et en utilisant cette syntaxe : $y(0)=3$.

On voit que la calculatrice regroupe les 2 fonctions trigonométriques dans une seule : sinus, avec un déphasage.



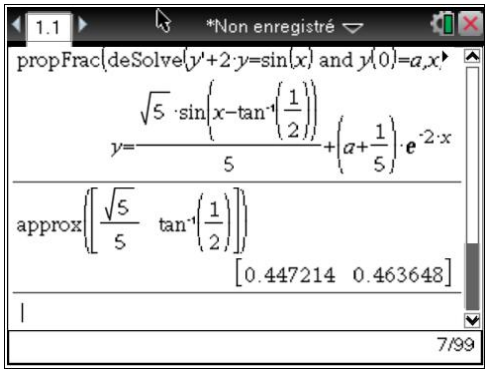
Ici encore, on peut commander « propFrac » pour séparer l'exponentielle, et on peut aussi commander « tExpand » (menu-3-B-1) pour retrouver les sinus **et** les cosinus, pour avoir un résultat qui ressemble à ce qu'on obtient en résolvant manuellement.



On peut se demander quelle condition initiale du type $y(0)=a$ il aurait fallu donner afin d'éliminer la présence du terme exponentiel.

Il aurait fallu choisir $a=-1/5$.

Cela aurait donné une réponse périodique dont l'amplitude est environ 0,447 et l'angle de phase environ 0,464.



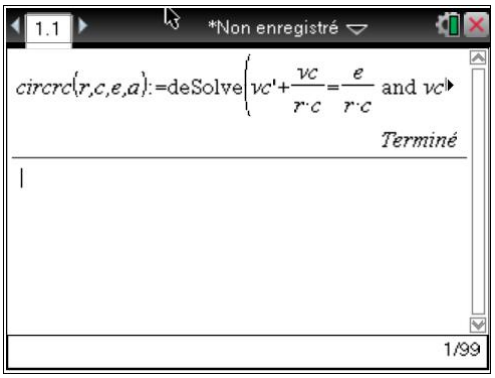
Exemple 2 : circuit RC.

L'équation associée à un circuit RC est une équation différentielle linéaire du premier ordre, dans laquelle R est la résistance, C est la capacitance du condensateur, $E(t)$ est la source (force électromotrice) et *a* est le voltage initial aux bornes du condensateur :

$$\frac{dv_c}{dt}+\frac{1}{RC}v_c=\frac{E(t)}{RC},\quad v_c(0)=a$$

Nous pouvons construire une fonction pour résoudre de tels problèmes. Prenons la variable pour représenter le temps. Alors notre fonction v_c dépendra de 4 variables : *R*, *C*, *E* et *a*.

Construisons la fonction $\text{CircRC}(R,C,E,a)$.

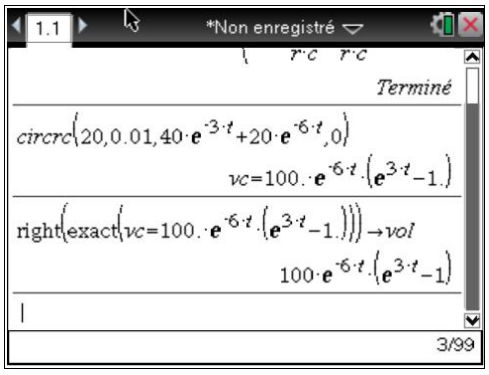


Pour nous faire une idée, prenons un exemple.

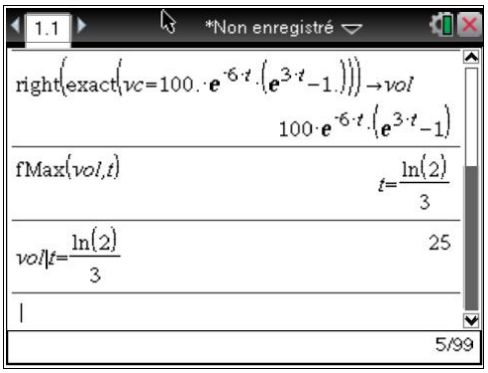
Supposons qu'une résistance de 20Ω soit branchée en série à un condensateur de 0,01F et une source $E(t)=40e^{-3t}+20e^{-6t}$. Initialement, le condensateur n'est pas chargé. On nous demande de montrer que le voltage maximum atteint est de 25V.

Nous utilisons notre fonction $CircRC\left(20,0.01,40e^{-3t}+20e^{-6t},0\right)$ pour trouver $v_c(t)$.

Pour se débarrasser des décimales, on utilise « exact » sur le membre de droite (avec « right »). On enregistre ce résultat dans *vol*.

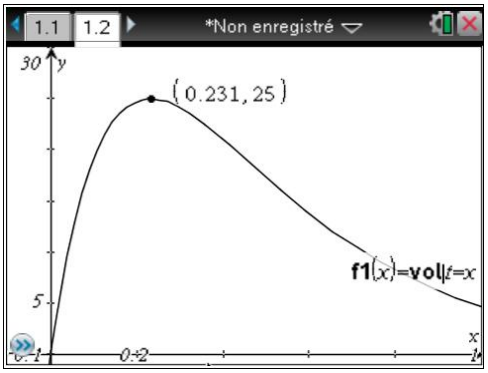


La fonction fMax : menu-4-8 nous évite d'avoir à calculer la dérivée du voltage « vol » et de l'annuler. Nous trouvons ainsi que le voltage maximal est effectivement 25V et qu'il est atteint quand $t = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0,231$ s.



Voici la représentation graphique du voltage aux bornes du condensateur, dans une fenêtre où $-0.1 \le t \le 1$ et $-1 \le V \le 30$. Évidemment on a utilisé x au lieu de t, et $f1(x)$ au lieu de V, pour satisfaire les exigences de la calculatrice.

La quantité $\frac{\ln(2)}{3}$ y est affichée en décimales.



Exemple 3 : Dans un cours d'équations différentielles, on apprend comment résoudre les équations du premier ordre en reconnaissant leur type. Bien sûr, la commande « deSolve » peut les résoudre pour nous. Mais pour procéder par nous-mêmes, il faut définir différentes fonctions selon le type d'équation. Cela aura l'avantage de nous forcer à reconnaître le type d'équation et même, dans certains cas, de donner la réponse de façon plus compacte.

Donnons les exemples pour :

une équation différentielle séparable, $\frac{dy}{dx} = p(x)q(y)$

une équation différentielle linéaire du premier ordre, $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

et une équation différentielle exacte, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ où $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

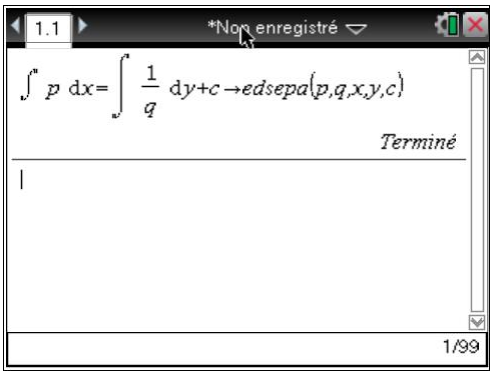
Nous voulons définir des fonctions personnalisées qui vont résoudre chacun de ces types d'équations différentielles. Pour simplifier, nous n'introduisons pas de condition initiale et nous allons répondre avec une constante arbitraire.

Pour l'équation à variables séparables, nous procédons comme suit :

soit $\frac{dy}{dx} = p(x)q(y)$,

d'où $\int p(x)\,dx = \int \frac{1}{q(y)}\,dy + C$.

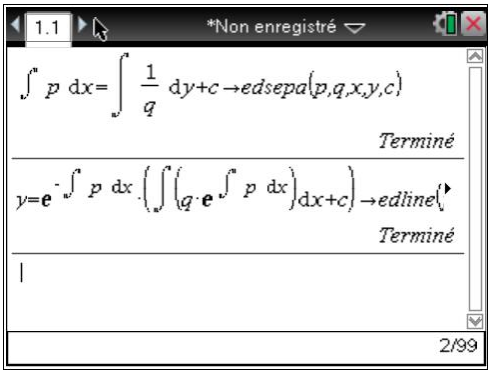
C'est ce que nous définirons pour la calculatrice



Pour la linéaire du premier ordre, nous savons que la solution générale est

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right).$$

C'est cette formule qui est donnée dans la définition de la fonction, avec ses paramètres : *edline*(*p*,*q*,*x*,*y*,*c*).



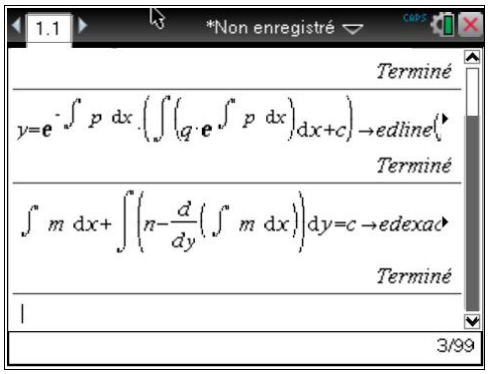
Finalement, si l'équation différentielle $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ est exacte, alors sa solution est $V(x,y) = C$, où V est telle que $\frac{\partial V}{\partial x} = M$ et $\frac{\partial V}{\partial y} = N$. Mais alors, $V = \int M\,dx + K(y)$ où K doit satisfaire $N = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,dx\right) + K'(y)$.

Ainsi $K(y) = \int\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,dx\right)\right)dy$.

C'est ce dernier résultat que nous écrivons dans notre fonction à définir :

$$\int M\,dx + \int\left(N - \frac{d}{dy}\left(\int M\,dx\right)\right)dy = C$$

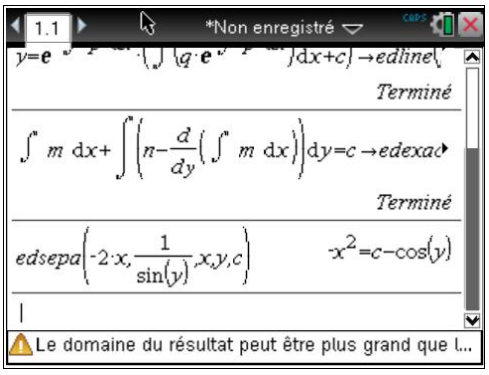
$$\rightarrow edexacte(M,N,x,y,C)$$



Maintenant nous pouvons résoudre, à titre d'exemples, les 3 équations différentielles suivantes :

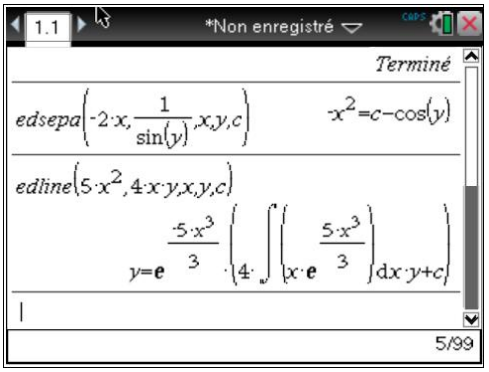
$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\sin(y)}$, $\frac{dy}{dx} + 5x^2y = 10e^{-2x}$ et $\left(2y^2 + \sin(x)\right)dx + 4xy\,dy = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\sin(y)}$, qui est une équation à variables séparables, avec $p = -2x$ et $q = \frac{1}{\sin(y)}$.



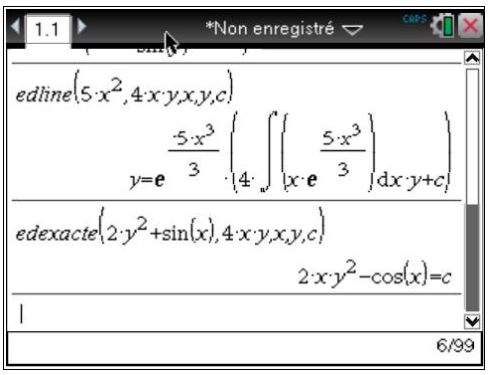
Permettons-nous de changer tous les signes, sauf celui de C : $x^2 = C + \cos(y)$.

$\frac{dy}{dx} + 5x^2 y = 10e^{-2x}$, qui est une équation linéaire, avec $p = 5x^2$ et $q = 10e^{-2x}$.



Nous remarquons que la solution de cette équation différentielle comporte une intégrale qui ne possède pas de primitive en termes de fonctions élémentaires : $y = e^{-5x^3/3}\left(4y\int x e^{5x^3/3}\,dx + C\right)$

$\left(2y^2 + \sin(x)\right)dx + 4x\,y\,dy = 0$, qui est exacte avec $M = 2y^2$ et $N = 4x\,y$.



Ici nous ne changeons rien, la solution est bien simplifiée :

$2x\,y^2 - \cos(x) = C$.

début du document

2. Équations différentielles d'ordre deux.

Voici deux exemples d'équations différentielles d'ordre deux. Notez que pour indiquer une dérivée seconde avec la commande deSolve, il faut taper deux fois ['], qui se trouve dans la palette [?!▸].

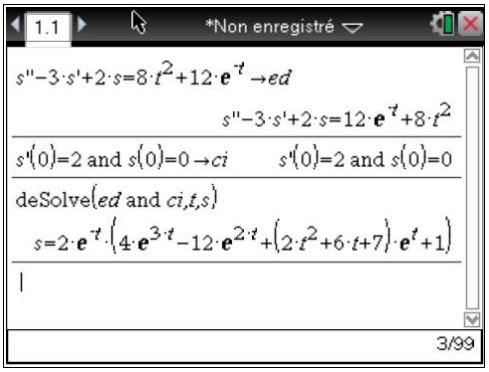
Exemple 4 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$s''(t)-3s'(t)+2s(t)=8t^2+12e^{-t},\ s(0)=0,\ s'(0)=2\,.$$

À la main, nous utiliserions la méthode des coefficients indéterminés pour résoudre ce problème.

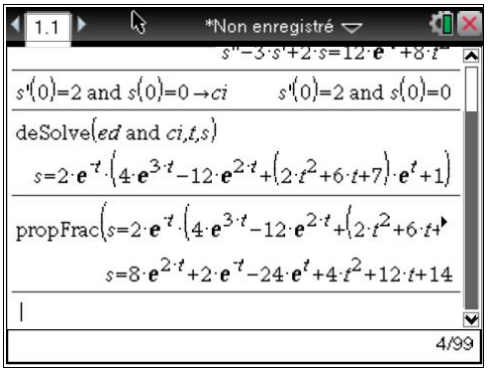
Avec la calculatrice, nous pouvons diviser le travail en tapant l'équation différentielle que nous appelons « ed », et les conditions initiales que nous appelons « ci ».

Nous pouvons ainsi faire résoudre l'équation différentielle sans encombrer la ligne de commande.



La commande propFrac [menu]-[3]-[9]-[1] donne la réponse sous une forme plus « naturelle » :

$$s(t)=8e^{2t}+2e^{-t}-24e^{t}+4t^2+12t+14$$



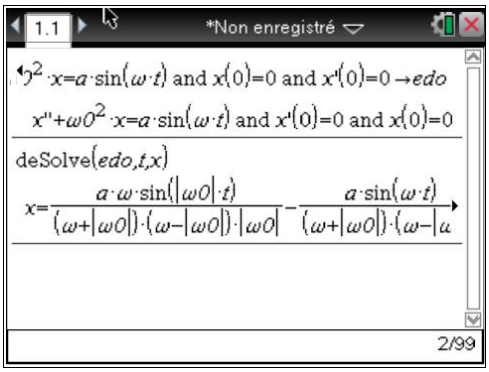
Exemple 5 : mouvement harmonique / régime permanent.

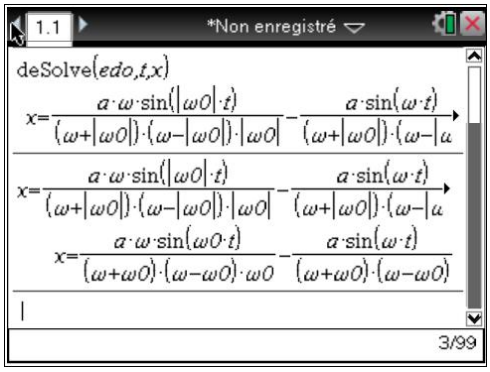
Un problème de masse-ressort nous amène à résoudre l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=A\sin(\omega t),\ x(0)=0,\ x'(0)=0$$

Le fait de ne pas avoir d'amortissement a comme conséquence que la réponse du système ne comporte pas de régime transitoire : il n'y a que le régime permanent.

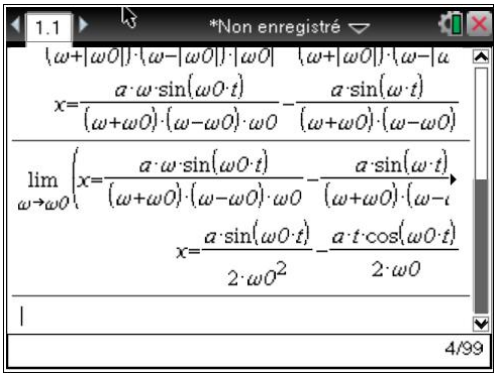
La TI ne traite pas la quantité ω_0 comme une quantité positive, à moins que nous ajoutions cette information.



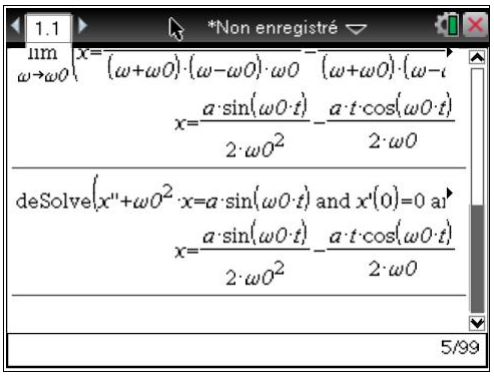


Voilà qui simplifie la lecture!

Dans le cas où $\omega = \omega_0$, on obtiendrait le phénomène de résonance. La TI a « présumé » que $\omega \neq \omega_0$. Pour obtenir le cas où $\omega = \omega_0$, nous faisons calculer une limite.



Nous aurions aussi bien pu résoudre l'équation différentielle en remplaçant ω par ω_0, en spécifiant encore que $\omega_0 > 0$.



début du document

3. Équations différentielles d'ordre supérieur à deux

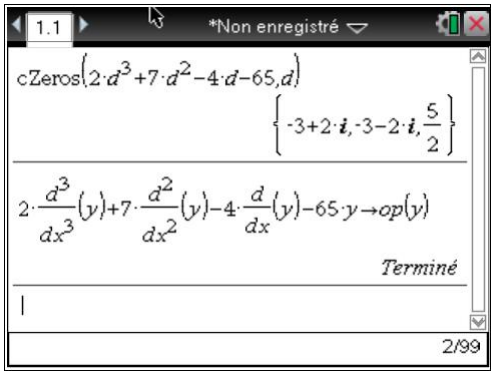
Il est sûrement encore important de résoudre à la main les types classiques d'équations différentielles du premier ordre. Il est sûrement encore important d'apprendre la méthode des coefficients indéterminés et la méthode de variation des paramètres. Il est sûrement très intéressant de s'aider de la TI, surtout pour les problèmes où les calculs sont longs. Ainsi, nous exploiterons au maximum les fonctionnalités présentes dans la calculatrice.

Exemple 6 : Dans nos TI, il n'y a pas de trucs pour résoudre des équations différentielles d'ordre supérieur à 2. Comment pouvons-nous utiliser notre calculatrice pour résoudre, par exemple, l'équation différentielle du troisième ordre suivante?

$$2\frac{d^3y}{dx^3}+7\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-65y=2x+1-3e^x$$

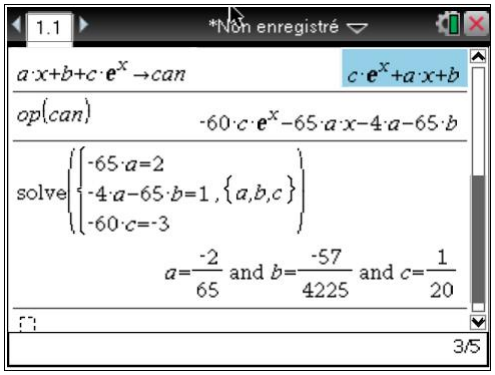
Cette équation se résout par la méthode des coefficients indéterminés; nous ferons faire les calculs (recherche des racines, calcul des dérivées, etc.) par la calculatrice.

Il nous faut trouver les racines du polynôme caractéristique $\varphi(D)=2D^3+7D^2-4D-65$ de notre équation. Nous voyons que les racines sont 5/2 et $-3\pm 2i$, ce qui nous permet de produire la solution complémentaire. Nous avons appelé notre opérateur différentiel « op ». Remarquons que si on se satisfait de la variable x, on n'a pas besoin d'écrire $\text{op}(x,y)$, mais seulement $\text{op}(y)$.



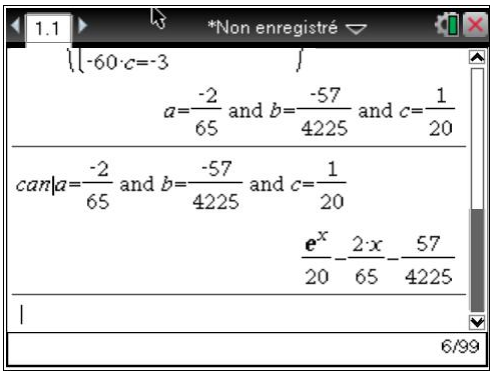
Le candidat pour la solution particulière est $Ax+B+Ce^x$. On l'appelle « can » et on demande « op(can) ». Il reste ensuite à faire résoudre le système d'équations issu du résultat.

Ici on a demandé de résoudre un système d'équations sans spécifier que les équations sont linéaires pour avoir le résultat avec des égalités et le nom des coefficients.



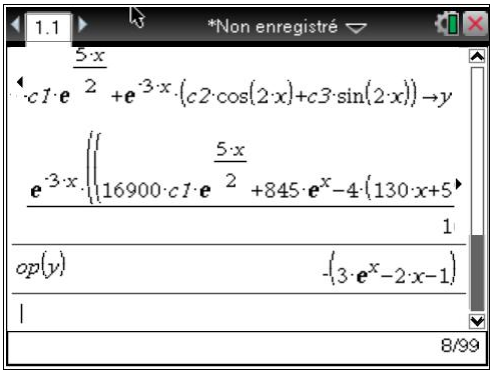
La solution particulière est « can » en remplaçant les valeurs de A, B et C :

$$y_p = \frac{-2}{65}x - \frac{57}{4225} + \frac{1}{20}e^x$$



La solution générale est donc

$$y_G = c_1 e^{5x/2} + e^{-3x}\left(c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)\right) - \frac{2}{65}x - \frac{57}{4225} + \frac{1}{20}e^x$$



Nous pouvons vérifier notre réponse dans la TI en demandant $\text{op}(y_G)$.

Ainsi, notre réponse était bonne!

Début du document

Michel Beaudin et Chantal Trottier