Résolution numérique et graphique d'équations différentielles d'ordre 1 (chap. 1)
Gilles Picard (8 septembre 2016) , TI-Nspire CAS CX avec OS 4.3

Il est recommandé de travailler dans un nouveau classeur, nommez-le mat265-graphes.
Les opérations faites avec Nspire sont disponibles dans le fichier chap1-champ-pentes-Euler.tns
Quoiqu'il soit plus facile de travailler avec la version ordinateur de Nspire, les directives de ce document sont données en fonction de la version calculatrice.

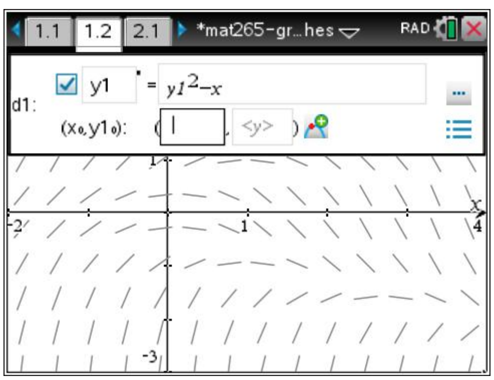
1- a) Produisez un champ de pentes pour l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x$.
Utilisez une valeur de x qui va de -2 à 4 et une valeur de y qui va de -3 à 3.

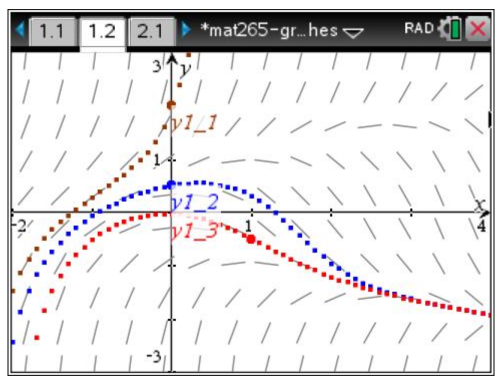
b) Ajoutez sur le graphe les courbes solutions correspondant aux conditions initiales suivantes : $y(0) = 2 \quad y(0) = 0.5 \quad y(1) = -0.5$

Solution :

Il faut créer une fenêtre graphique et ensuite choisir le bon type de graphique en faisant menu—3 (Entrée/Modification graphique)—8 (Éq. diff.) qu'on va abréger en donnant seulement la séquence de la commande menu-3-8 (avec la version 4.3 de l'OS).

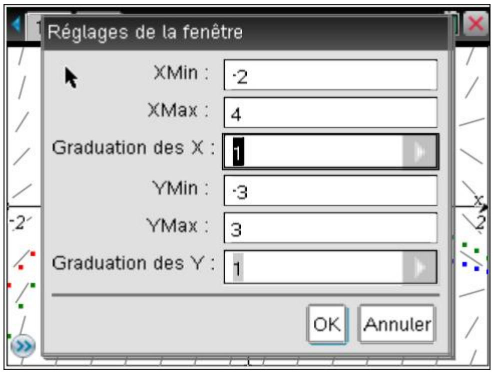
On remarque ici que la variable indépendante doit être x et la variable indépendante doit être $y1$. On passe d'un champ à l'autre avec la touche tab ou avec l'aide du pavé tactile ou des flèches. Sur la première figure, le curseur en haut dans la boîte de dialogue est à l'endroit où on peut saisir une condition initiale. Pour en saisir plusieurs, on utilise l'icône à droite avec un petit signe plus.

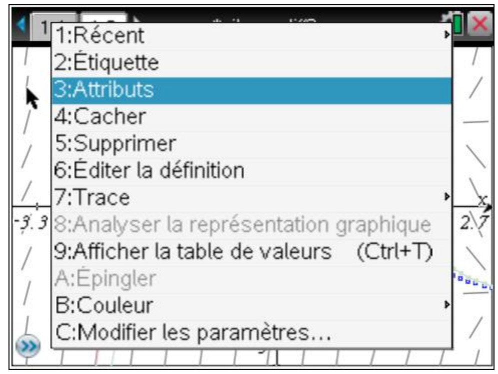




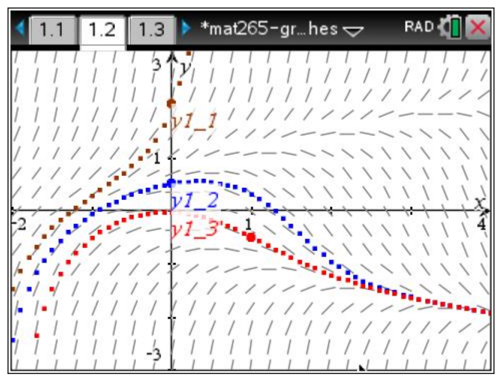
On observe ici que la fenêtre est affichée pour l'étendue de valeurs spécifiées dans l'énoncé, ce qui s'obtient en modifiant les paramètres d'affichage de la fenêtre, accessible par menu-4-1 (voir figure suivante, page 2).

On peut également changer les paramètres d'affichage de chaque courbe en amenant le curseur au-dessus d'une courbe (le curseur se change alors en une main avec un doigt qui pointe sur la courbe) et en faisant ctrl-menu ce qui est équivalent-ordinateur à cliquer le bouton droit de la souris sur la courbe. Dans le menu contextuel qui apparaît, on choisit l'option 3 « Attributs ». On pourrait alors choisir de relier les points ou pas (option par défaut en équations différentielles) et la forme des points. La fenêtre d'affichage des options de ce mode graphique peut s'obtenir également de ce menu contextuel, c'est la dernière option en bas « Modifier les paramètres ». On peut également accéder aux options avec le bouton contenant 3 points à droite de la fenêtre de saisie de l'équation.





Dans cette fenêtre d'options, vous pouvez changer l'option par défaut pour le champ de pentes qui est de 14, c'est-à-dire que dans la largeur de l'affichage (*x* qui va de -2 à 4 dans notre exemple), on évaluera 14 pentes pour une valeur de *y* donnée. C'est la dernière option de cette fenêtre. On voit dans la figure ci-dessous qu'on obtient une meilleure impression du comportement général des solutions avec un champ de pentes « plus fourni » si on utilise 25 comme valeur au lieu de 14.



2- <u>Autre exemple de champ de pentes avec conditions initiales</u>

a) Produisez un champ de pentes pour l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = 3x + \cos(y)$.

Utilisez une valeur de *x* qui va de -4 à 4 et une valeur de *y* qui va de -4 à 4.

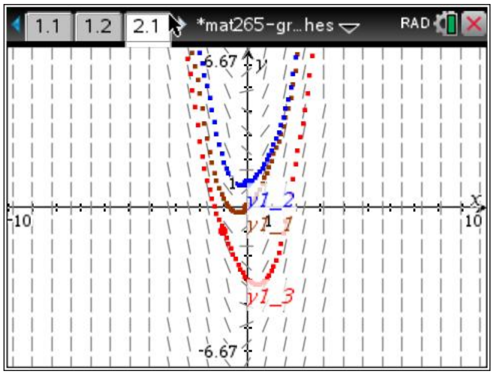
b) Ajoutez sur le graphe les courbes solutions correspondant aux conditions initiales suivantes : $y(0) = 0 \quad y(0) = 1 \quad y(-1) = -1$

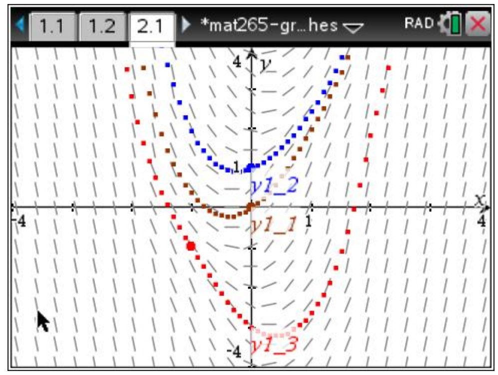
Solution :

Il est fortement recommandé de remplacer les données du dernier exemple par les nouvelles valeurs. Ce mode graphique est fait pour résoudre numériquement et graphiquement des systèmes d'équations différentielles d'ordre 1. Il n'est donc pas souhaitable de laisser une liste d'équations dans l'éditeur si ce n'est pas un système d'équations différentielles d'ordre 1.

On peut également choisir d'ajouter une nouvelle activité dans notre classeur avec la commande $\boxed{\text{doc}\blacktriangledown}$-$\boxed{4}$-$\boxed{1}$; en y ajoutant une page « Graphiques » celle-ci sera indépendante des données sur les pages des autres activités. C'est ce que nous avons fait dans les écrans Nspire de ce document (on remarquera que nous changeons d'activités à chaque problème, 1.1 et 1.2 pour le problème 1, 2.1 pour le problème 2, etc.).

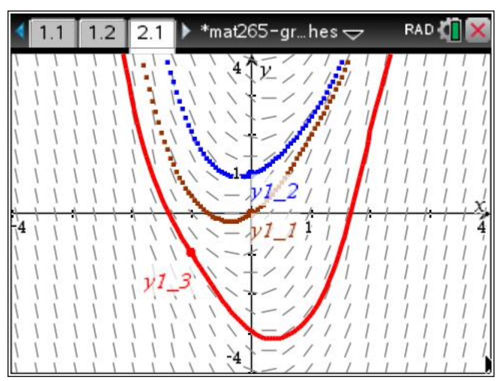
Dans le premier écran ci-dessous on n'a que saisi l'équation et les 3 conditions initiales données. Le 2^{e} écran montre l'ajustement de la fenêtre d'affichage (menu-4-1) pour respecter les valeurs demandées pour les variables x et y. Dans les 2 écrans on a travaillé avec une valeur de 25 pour l'option « Champ résolution».





L'option par défaut pour la production de la solution numérique est un pas de 0,1 ce qui peut être insuffisant si la solution varie beaucoup localement (comparer $y1\_1$ avec $y1\_3$).

Les 2 écrans qui suivent montrent l'option « Pas de tracé » modifiée pour une plus petite valeur (0,05 dans ce cas) et une modification des attributs de $y1\_3$ pour avoir une courbe plus épaisse, avec des points (petits) reliés entre eux. On a maintenant une courbe au lieu d'une série de points.



3- <u>Étude plus en détails des paramètres de contrôle de la solution numérique (**méthode d'Euler**)</u>.

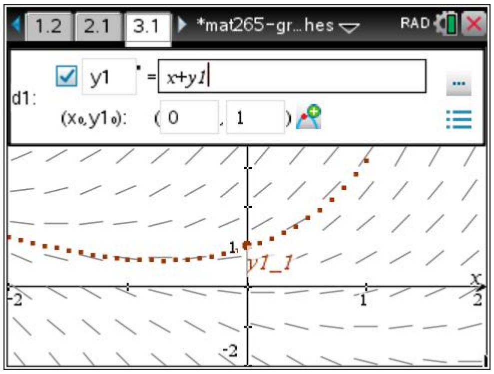
a) considérez l'équation $\dfrac{dy}{dx} = x + y$ avec $y(0) = 1$. On veut estimer $y(1) = ?$
(Pages 26 à 28 des notes de cours).

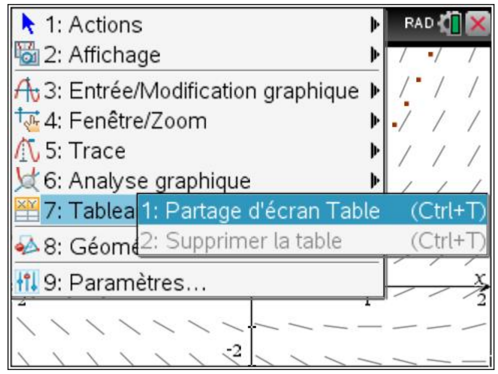
Construisez le champ de pentes et la solution numérique de cette équation.
Utilisez x qui va de -2 à 2 et y qui va de -2 à 6.

Solution :

Comme mentionné au début de la solution du problème 2, on ajoute une nouvelle activité à notre classeur (doc▾-4-1) et on ajoute une page graphique.

Voici le résultat en ajustant la fenêtre aux paramètres demandés. Pour créer la table de valeurs, on demande menu-7-1 ou, on utilise le raccourci ctrl-T .

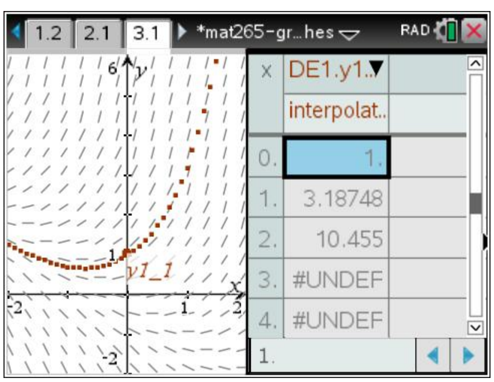


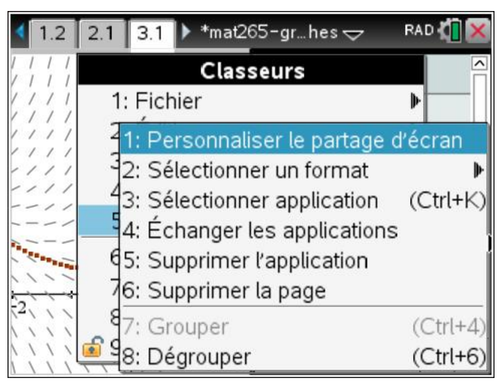


b) Créez la table de valeurs de la solution numérique. Séparez la table de valeurs du graphe. Utilisez un pas de 0,1 dans la table de valeurs.

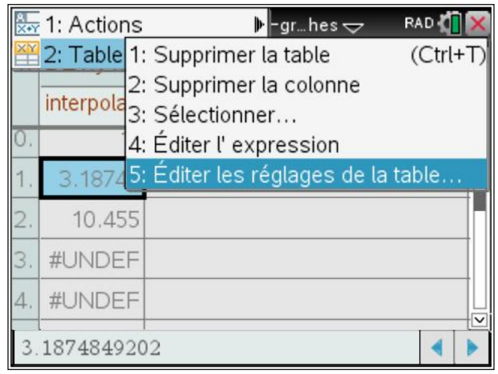
Solution :

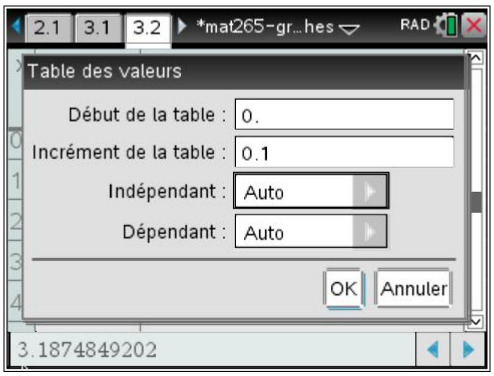
On peut ensuite afficher la table de valeurs dans une page séparée en dégroupant avec la commande doc▾-5-8 ou avec le raccourci ctrl-6.

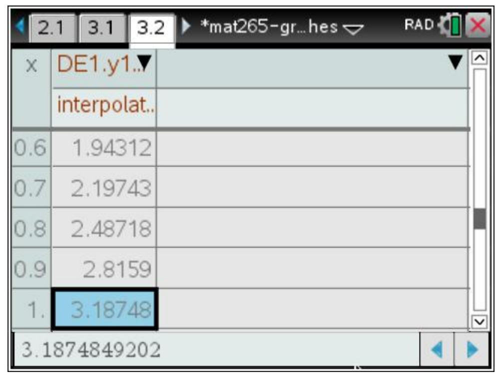




En affichant la page contenant la table de valeurs, on remarquera que les options du menu diffèrent de ce que l'on avait auparavant (l'objet sur lequel s'applique la commande menu est une table de valeurs).







L'option « Incrément de la table » ne contrôle que le pas pour l'affichage et non le pas de la méthode numérique utilisée. On peut estimer la valeur de $y(1)$ à l'aide de la table de valeurs : $y(1) \approx 3{,}1875$

c) Accédez aux paramètres de contrôles du champ de pentes et de la solution numérique. Appliquez la méthode d'Euler avec un nouveau pas, 2 fois plus petit soit $h = 0{,}05$ au lieu de 0,1. C'est le pas de tracé (voir figure suivante).

Sur le graphe, avec la touche tab accédez à la ligne d'entrée de l'équation ; à droite de celle-ci, vous verrez un petit carré avec 3 points (…), choisissez-le et faites enter.
Ou, avec un ordinateur, cliquez, avec le bouton droit de la souris, sur la courbe de la solution numérique et choisissez « Modifier les paramètres… » (on peut faire la même chose avec la calculatrice en faisant ctrl-menu lorsque vous amenez le curseur sur la courbe). Autant sur la calculatrice que sur un ordinateur la séquence ctrl-G fera apparaître la ligne d'édition des fonctions.
Dans la fenêtre de modification des paramètres, vous verrez les options suivantes.

Méthode de résolution : vous pourrez choisir Euler ou Runge-Kutta (on veut Euler pour notre exemple).

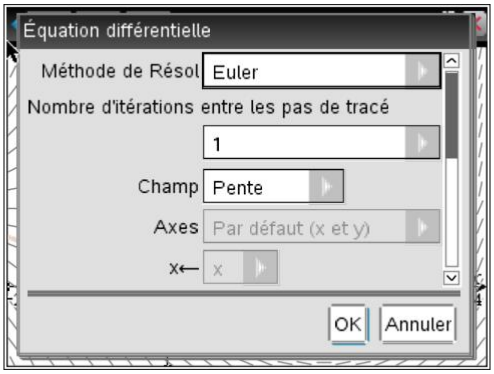
Nb d'itérations entre les pas de tracé (pour Euler seulement) : pour raffiner le pas de base.

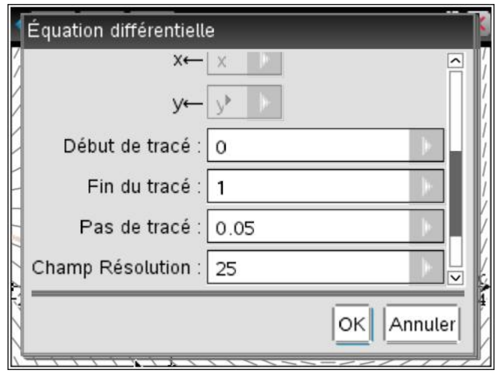
Champ : pour tracer ou pas le champ de pentes.

Début et fin de tracé : pour contrôler la courbe tracée si on choisit « Aucun champ de pentes »

Pas de tracé : pas de base, valeur de h, avec Euler (ou Runge-Kutta). Utilisez ici un pas de 0,05.

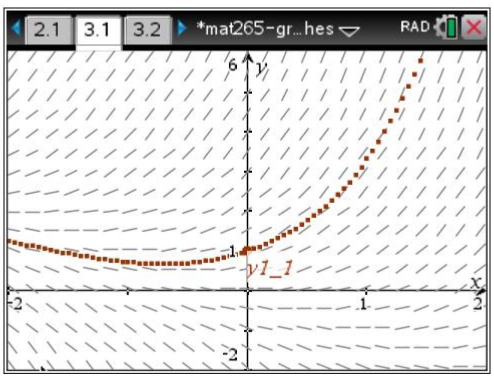
Champ résolution : nombre de subdivisions horizontales pour le champ de pentes (utilisez 25 pour notre exemple)





Solution :

Voici le résultat des modifications faites aux paramètres d'affichage de la solution.



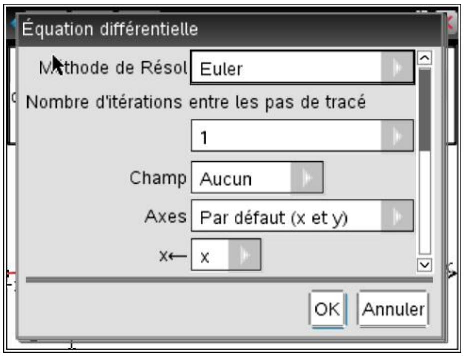
On remarque sur les deux dernières figures l'impact de passer d'un pas de 0,1 à 0,05. On obtient évidemment 2 fois plus de points sur le graphe (un point à tous les 0,05 au lieu de 0,1). De plus, avec un pas plus petit, la solution affichée est plus précise. Notre estimé pour la valeur de $y(1)$ est maintenant de 3,3066 au lieu de 3,1875. La vraie valeur, trouvée algébriquement, est $y(1) = 3,4366$. On remarque sur la table de valeurs que les résultats sont toujours affichés avec un incrément de 0,1 même si la méthode d'Euler a effectué les calculs avec un pas de 0,05

4- Considérons l'équation $\dfrac{dy}{dx} = y(4-y)$ avec $y(0) = 0,2$. On veut estimer $y(4) = ?$

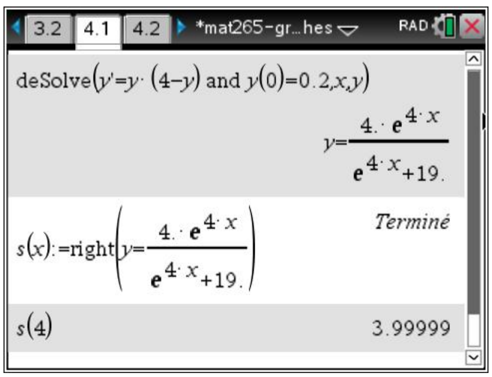
Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de 0,5 et ne tracez que la courbe solution sur cet intervalle (donc on doit mettre l'option « Champ » à « aucun »). Utilisez une fenêtre avec x qui va de -1 à 6 et y qui va de -2 à 6.

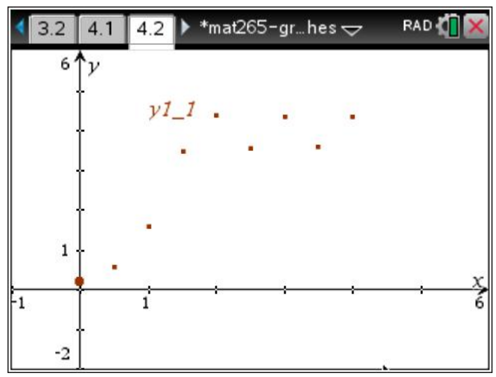
Créez une table de valeurs sur une page séparée avec également un pas de 0,5.
Ajoutez la vraie solution $s(x)$ trouvée à l'aide de la commande deSolve( ).
Diminuez le pas à 0,2 et comparez la solution estimée et la vraie réponse.
Pour voir un comportement plus erratique, utilisez un pas de 0,8

Solution :

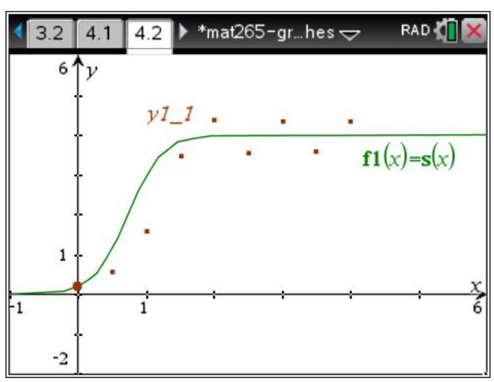


En choisissant 0 et 4 comme valeurs pour le début et la fin du tracé, on s'assure, quand le champ de pentes est à « Aucun », que la courbe ne sera tracée que sur cet intervalle.

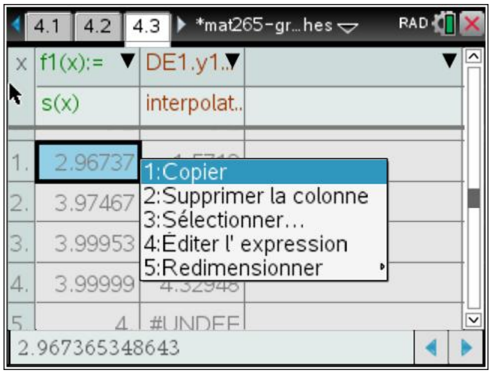


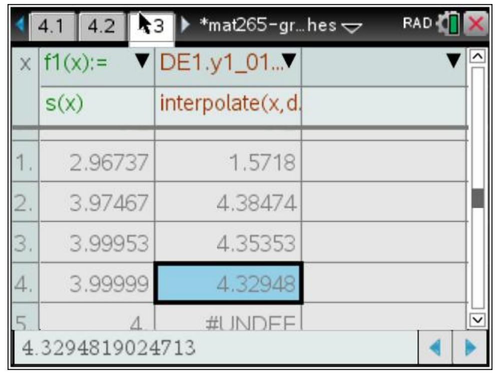


On remarque, sur l'écran de gauche, la vraie solution obtenue avec la commande deSolve( ) et la vraie valeur de y quand $x = 4$, soit $y(4) = 3,99999$.



On remarque sur ce dernier écran l'ajout de la vraie courbe solution. Pour effectuer cet ajout, on fait ctrl-G pour afficher la ligne de saisie, on s'assure d'avoir le choix « Fonction » dans le type de graphique (en tapant menu-3-1) et on ajoute la solution $s(x)$ déjà calculée au graphique (voir écran précédent). On affiche la table de valeurs (ctrl-T), comme on l'a vu à l'exemple 3, et on ajuste, au besoin, la largeur des colonnes pour bien voir les résultats (choisissez une cellule et faites ctrl-menu sur la calculatrice ou bouton droit avec la souris sur l'ordi puis faites « redimensionner »).

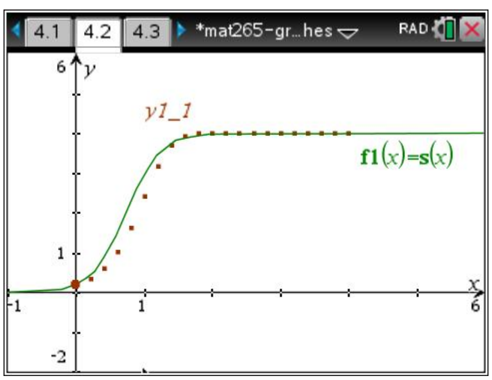


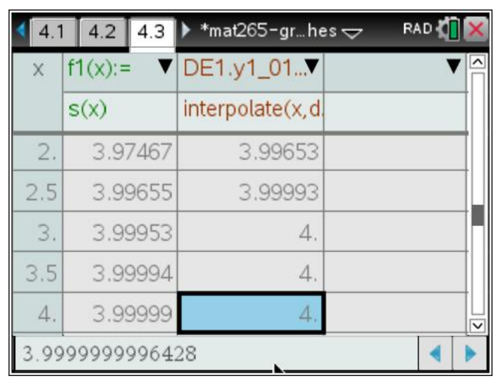


On constate ici qu'avec un pas de 0,5 l'estimé numérique de la solution par la méthode d'Euler donne une valeur $y(4) \approx 4,32948$.

Pour changer la valeur du pas, il faut s'assurer d'être dans le mode « Éq. diff. » pour le type de graphique et non dans le mode fonction ordinaire. C'est ce dernier mode que vous devriez avoir si vous avez suivi les étapes précédentes puisque votre dernière action dans la page graphique fut d'ajouter le graphe de la fonction $s(x)$ qui est une fonction ordinaire. Avant de changer le pas, remettez-vous dans le mode « Éq. diff. » et allez modifier le pas pour le mettre à 0,2.

Voici le résultat. La solution numérique contient plus de points, plus près de la vraie solution.





Avec le pas à 0,8 on constate un comportement erratique de la solution numérique.