Résolution par la méthode des coefficients indéterminés

gilles.picard@etsmtl.ca 18 septembre 2016

Note: les équations ou expressions écrites en noir ont été volontairement non simplifiées. Celles écrites en bleu et qui ne sont pas simplifiées le seront (en vert) en cliquant dessus, suivi de "Enter".

Nous allons résoudre l'équation suivante par la méthode des coefficients indéterminés:

$$\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5y=2e^{-2x}+4\cdot\sin(5x)$$

Trouvons la solution homogène avec les zéros du polynôme caractéristique:

$$\text{cZeros}\left(m^2+4\cdot+5,m\right)$$

On aura donc **yh**$=e^{-2x}\left(c1\cdot\sin(x)+c2\cdot\cos(x)\right)$

Le candidat pour la solution particulière, basé sur le côté droit de l'équation sera **yp**$=\boldsymbol{a}\cdot e^{-2x}+\boldsymbol{b}\cdot\sin(5x)+\boldsymbol{c}\cdot\cos(5x)$ où l'on doit trouver la valeur des coefficients ***a***, ***b*** et ***c*** pour que ce soit une solution de l'équation originale.

Substituons ce candidat dans le côté gauche de l'équation différentielle:

$$\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5y|y=a\cdot e^{-2\cdot x}+b\cdot\sin(5\cdot x)+c\cdot\cos(5\cdot x)$$

Suite à la page suivante

On voit avec le résultat une forme un peu particulière qu'on peut simplifier avec la commande PropFrac( )

$$\text{propFrac}\left(e^{-2\cdot x}\cdot\left(20\cdot(b-c)\cdot e^{2\cdot x}\cdot\cos(5\cdot x)-20\cdot(b+c)\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(5\cdot x)+a\right)\right)$$

Comme on veut une solution à l'équation, on en déduit 3 équations à résoudre en *a,b,c* en comparant les coefficients des fonctions du résultat avec le côté droit de l'équation différentielle

$$\text{solve}\left(\begin{cases}20\cdot b-20\cdot c=0\\ {}^{-}20\cdot b-20\cdot c=4\\ a=2\end{cases},\{a,b,c\}\right)$$

On substitue ces valeurs dans le candidat et on obtient la solution particulière:

$$yp=a\cdot e^{-2\cdot x}+b\cdot\sin(5\cdot x)+c\cdot\cos(5\cdot x)|a=2\text{ and }b=\frac{-1}{10}\text{ and }c=\frac{-1}{10}$$

La solution générale est la somme de *yh* et *yp*:

$$y=e^{-2\cdot x}\cdot\left(c1\cdot\sin(x)+c2\cdot\cos(x)\right)+\frac{-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+2\cdot e^{-2\cdot x}$$

On voit sur les pages de calcul suivantes les mêmes opérations pour résoudre ce problème.

Vous pouvez remplacer les équations de ces deux premières pages par d'autres valeurs. Mais les autres pages sont statiques...

Vous devriez apprendre à faire des calculs similaires avec votre calculatrice.

©On veut résoudre l'équation $\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5y=2e^{-2x}+4\cdot\sin(5x)$

©Pour la solution homogène, on considère l'équation homogène associée $\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5y=0$

©dont l'équation caractéristique est $m^2+4\cdot m+5=0$. Trouvons les racines

$\text{cZeros}(m^2+4\cdot m+5,m)$ → $\{-2+i,-2-i\}$

©La solution homogène est donc $yh=e^{-2x}(c1\cdot\sin(x)+c2\cdot\cos(x))$

$yh:=e^{-2\cdot x}\cdot(c1\cdot\sin(x)+c2\cdot\cos(x))$ → $(c2\cdot\cos(x)+c1\cdot\sin(x))\cdot e^{-2\cdot x}$

©On peut vérifier cette solution en appliquant celle−ci à la partie gauche de l'équation

$\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5\cdot y$ → $5\cdot y$

$\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5\cdot y|y=yh$ → 0

©Le candidat pour la solution particulière s'obtient en tenant compte des termes à droite dans l'équation. Ici on pose:

$yp:=a\cdot e^{-2\cdot x}+b\cdot\sin(5\cdot x)+c\cdot\cos(5\cdot x)$ → $c\cdot\cos(5\cdot x)+b\cdot\sin(5\cdot x)+a\cdot e^{-2\cdot x}$

$yp:=a\cdot e^{-2\cdot x}+b\cdot\sin(5\cdot x)+c\cdot\cos(5\cdot x)$ → $c\cdot\cos(5\cdot x)+b\cdot\sin(5\cdot x)+a\cdot e^{-2\cdot x}$

©Il n'y a pas de cas d'exception dans ce problème, les fonctions de yp sont différentes de celles de yh.

©On substitue ce candidat dans l'équation différentielle:

$\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5\cdot y|y=yp$ → $e^{-2\cdot x}\cdot(20\cdot(b-c)\cdot e^{2\cdot x}\cdot\cos(5\cdot x)-20\cdot(b+c)\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(5\cdot x)+a)$

$\text{propFrac}(e^{-2\cdot x}\cdot(20\cdot(b-c)\cdot e^{2\cdot x}\cdot\cos(5\cdot x)-20\cdot(b+c)\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(5\cdot x)+a))$ → $(20\cdot b-20\cdot c)\cdot\cos(5\cdot x)+(-20\cdot b-20\cdot c)\cdot\sin(5\cdot x)+a\cdot e^{-2\cdot x}$

©Cette dernière commande est parfois utile pour simplifier l'expression obtenue. Comme on veut une solution, on aura:

$(20\cdot b-20\cdot c)\cdot\cos(5\cdot x)+(-20\cdot b-20\cdot c)\cdot\sin(5\cdot x)+a\cdot e^{-2\cdot x}=2\cdot e^{-2\cdot x}+4\cdot\sin(5\cdot x)$ → $(20\cdot b-20\cdot c)\cdot\cos(5\cdot x)+(-20\cdot b-20\cdot c)\cdot\sin(5\cdot x)+a\cdot e^{-2\cdot x}=4\cdot\sin(5\cdot x)+2\cdot e^{-2\cdot x}$

©En comparant les mêmes fonctions de chaque côté du signe égal, on déduit le système d'équations suivant qu'on résout

$\begin{cases}20\cdot b-20\cdot c=0\\ -20\cdot b-20\cdot c=4\\ a=2\end{cases}$ → $\{20\cdot b-20\cdot c=0,-20\cdot b-20\cdot c=4,a=2\}$

$\text{solve}\left(\begin{cases}20\cdot b-20\cdot c=0\\ -20\cdot b-20\cdot c=4\\ a=2\end{cases},\{a,b,c\}\right)$ → $a=2$ and $b=\frac{-1}{10}$ and $c=\frac{-1}{10}$

$yp|a=2$ and $b=\frac{-1}{10}$ and $c=\frac{-1}{10}$ → $\frac{-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+2\cdot e^{-2\cdot x}$

©La solution générale s'obtient finalement en additionnant la solution homogène et la solution particulière yh+yp

$2\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{^-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+(c2\cdot\cos(x)+c1\cdot\sin(x))\cdot e^{-2\cdot x}$ $\quad \frac{^-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+(c2\cdot\cos(x)+c1\cdot\sin(x)+2)\cdot e^{-2\cdot x}$

$ysol:=2\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{^-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+(c2\cdot\cos(x)+c1\cdot\sin(x))\cdot e^{-2\cdot x}$ $\quad \frac{^-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+(c2\cdot\cos(x)+c1\cdot\sin(x)+2)\cdot e^{-2\cdot x}$

©On peut valider cette solution générale en la substituant dans l'équation différentielle

$\left(\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5\cdot y|y=ysol\right)=4\cdot\sin(5\cdot x)+2\cdot e^{-2\cdot x}$ $\quad$ true

©on peut aussi substituer seulement la solution particulière:

$yp:=\frac{^-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+2\cdot e^{-2\cdot x}$ $\quad \frac{^-\cos(5\cdot x)}{10}-\frac{\sin(5\cdot x)}{10}+2\cdot e^{-2\cdot x}$

$\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+5\cdot y|y=yp$ $\quad 2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot\left(2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(5\cdot x)+1\right)$

$\text{propFrac}\left(2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot\left(2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(5\cdot x)+1\right)\right)$ $\quad 4\cdot\sin(5\cdot x)+2\cdot e^{-2\cdot x}$