

Exemple de résolution avec Nspire, par le mode numérique graphique et par séries de puissances d'une équation différentielle d'ordre 2 avec conditions initiales en $x=0$.

gilles.picard@etsmtl.ca 2 septembre 2022

Note: les méthodes utilisées dans cet exemple ont déjà été vues aux sections 7.1 et 7.2 des notes de cours. On ne fournira donc que peu d'explications pour obtenir rapidement les solutions cherchées.

Considérons l'équation différentielle suivante (équation linéaire, homogène avec coefficients variables):

$(x^2+9) \cdot y'' + 2 \cdot y' + 5y = 0$ avec $y(0) = -3$ et $y'(0) = 3$; on cherche à estimer la valeur de $y(1.5)$ avec une précision de 4 décimales.

Pour juger de la précision obtenue, tous les estimés numériques sont arrondis à 4 décimales.

Comme on l'a vu à la section 7.1, on peut réécrire cette équation sous la forme standard

$$y'' = \frac{-2 \cdot y' - 5 \cdot y}{x^2 + 9}$$

On plonge ensuite dans un système d'équations d'ordre 1

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{-2 \cdot y_2 - 5 \cdot y_1}{x^2 + 9} \end{cases} \text{ avec } y_1(0) = -3 \text{ et } y_2(0) = 3$$

On veut une solution si $x=1,5$

Avec la **méthode d'Euler**, 15 étapes (pas de 0.1) on obtient l'estimé $y(1,5) = 1,7196$. Avec 10 fois plus d'étapes on trouve $y(1,5) = 1,6314$.

Ces résultats sont obtenus avec la page graphique suivante en mode «Éq. diff.» et en suivant les indications vues au début de la session.

Avec la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4** (voir section 7.1 des notes de cours), avec $n=3$ étapes (pas de 0.5), on trouve $y(1,5) = 1,6208$. Avec $n=15$ et $n=50$ étapes, on trouve le même estimé de $y(1,5) = 1,6213$ arrondi à 4 décimales.

Ces résultats sont obtenus avec un autre logiciel (ou avec une page Internet appropriée). Nous donnons ces résultats car cette méthode est d'utilisation courante et différente de ce que Nspire appelle méthode de Runge-Kutta.

À la page suivante, on saisit le système d'équations dans une fenêtre graphique en mode «Éq. diff.». Le résultat avec Euler plus haut peut s'obtenir avec cet page.

Si on choisit Runge–Kutta, comme on l'a vu à la section 7.1, Nspire utilise alors l'algorithme de Bogacky–Shampine d'ordre 3. La précision des résultats dépend principalement de la valeur attribuée à la variable «**Tolérance d'erreur** ou **tol**» qui donne une indication sur l'erreur locale en appliquant cette méthode. C'est une méthode à pas adaptifs. Le logiciel avance d'un pas assez petit pour que l'estimé de l'erreur soit inférieur à la valeur **tol**. Attention, on parle de **l'estimé** de l'erreur et non de la vraie valeur qui est inconnue.

À ce niveau, avec la valeur par défaut de 0,001, on peut s'attendre à obtenir 2 décimales de précision. Cela signifie que l'estimé, arrondi à 2 décimales, sera probablement bon. Mais il pourrait arriver que la 2e décimale soit dans l'erreur d'une unité. Par exemple, supposons qu'un calcul nous donne un résultat de 1,3452. Si la vraie valeur est 0,001 de moins, cela donne 1,3442. Le premier résultat arrondi à 2 décimales donne 1,35 alors que le vrai résultat arrondi à 2 décimales donne 1,34. Il est plus courant dans la pratique de parler plutôt de l'erreur d'un estimé au lieu de son nombre de décimales de précision. Cela est vrai même si en général on ne connaît pas la vraie valeur cherchée. On parle alors d'un estimé de l'erreur commise. Par exemple, si un estimé de 1,34 est précis à 2 décimales, cela signifie que la vraie valeur χ est dans l'intervalle

$1,34 \pm 0.005$ soit $1,335 < \chi < 1,345$. L'erreur commise est inférieure à $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0,005$

Voici les résultats obtenus en faisant varier, avec Nspire, le facteur **tol**:

tol=0.001 on a $y(1,5)=1,6205$ **tol**=0.0001 on a $y(1,5)=1,6212$ **tol**=0.00001 on a $y(1,5)=1,6213$ **tol**=0.000001 on a $y(1,5)=1,6213$

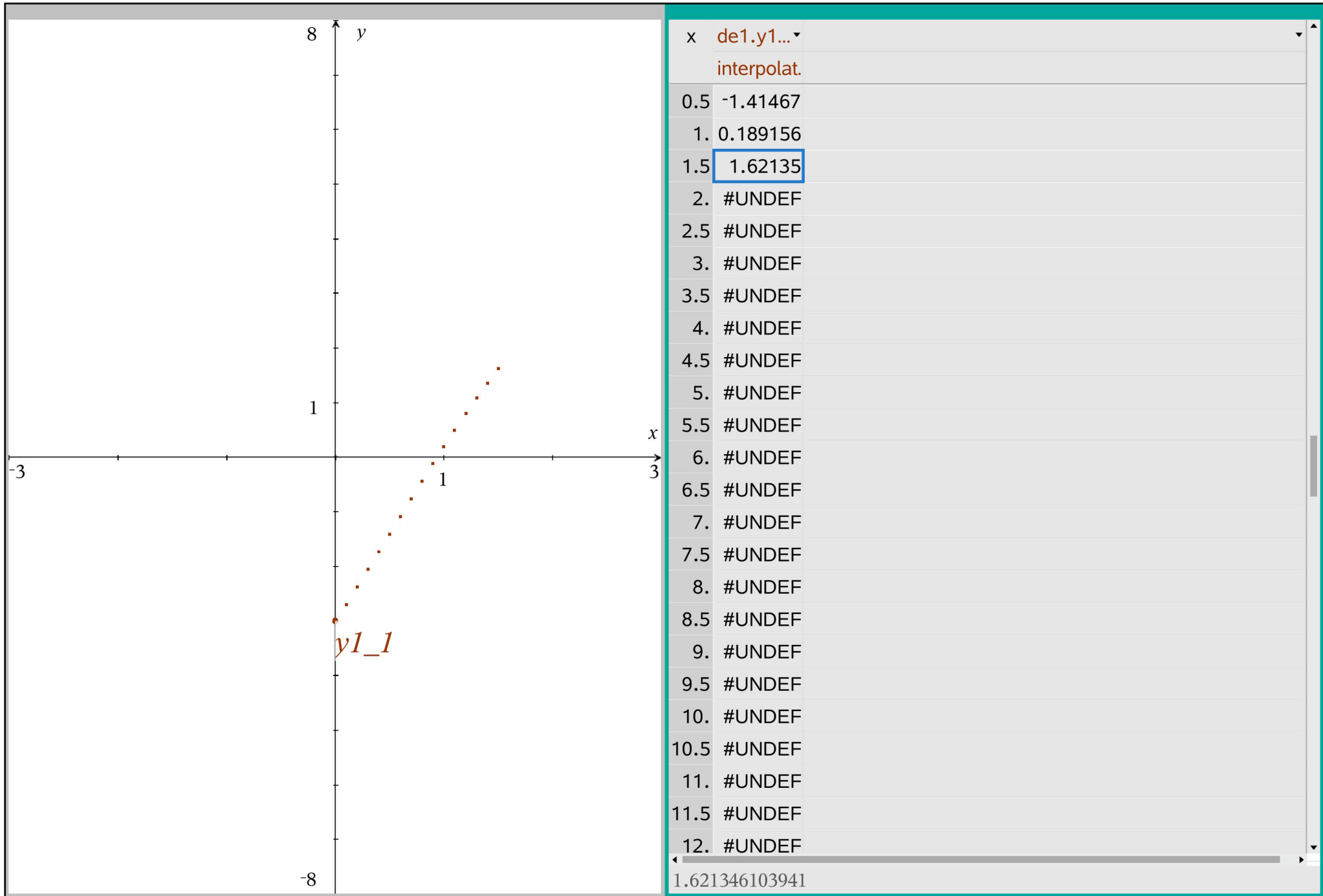
On peut conclure que la vraie valeur (à 4 décimales) de la solution en $x=1,5$ est $y(1,5)=1,6213$

Il faut être prudent lorsqu'on parle de résultats arrondis à 4 décimales. Avec une tolérance de 0.000001 on voit à la page suivante que Nspire donne une valeur estimée pour $x=1,5$ de 1,62135

En réalité, si vous choisissez cette case et regardez en bas de l'écran, vous verrez que la valeur est plutôt 1.621346103941

La valeur affichée dans la table est cette dernière valeur arrondie à 5 décimales. C'est ce que vous verrez si vous utilisez l'affichage par défaut des classeurs, "Flottant 6", c'est à dire un affichage en point flottant avec 6 chiffres significatifs, Si on prend la valeur plus complète et qu'on l'arrondit à 4 décimales, on obtient bien 1,6213.

Activité 2



Activité 3

$$n \cdot (n-1) \cdot a(n) + 9 \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot a(n+2) + 2 \cdot (n+1) \cdot a(n+1) + 5 \cdot a(n) = 0 \mid a(n+2) = w$$

$$9 \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot w + 2 \cdot a(n+1) \cdot (n+1) + a(n) \cdot (n^2 - n + 5) = 0$$

$$\text{solve}(9 \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot w + 2 \cdot a(n+1) \cdot (n+1) + a(n) \cdot (n^2 - n + 5) = 0, w)$$

$$w = \frac{-\left(2 \cdot a(n+1) \cdot (n+1) + a(n) \cdot (n^2 - n + 5)\right)}{9 \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$a(n+2) = \frac{-\left(2 \cdot a(n+1) \cdot (n+1) + a(n) \cdot (n^2 - n + 5)\right)}{9 \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \mid_{n=m-2}$$

$$a(m) = \frac{-\left(2 \cdot a(m-1) \cdot (m-1) + a(m-2) \cdot (m^2 - 5 \cdot m + 11)\right)}{9 \cdot m \cdot (m-1)}$$

$$a(m) = \frac{-\left(2 \cdot a(m-1) \cdot (m-1) + a(m-2) \cdot (m^2 - 5 \cdot m + 11)\right)}{9 \cdot m \cdot (m-1)} \mid_{m=n}$$

$$a(n) = \frac{-\left(2 \cdot a(n-1) \cdot (n-1) + a(n-2) \cdot (n^2 - 5 \cdot n + 11)\right)}{9 \cdot n \cdot (n-1)}$$

$$c := \text{seqGen}\left(\frac{-\left(2 \cdot a(n-1) \cdot (n-1) + a(n-2) \cdot (n^2 - 5 \cdot n + 11)\right)}{9 \cdot n \cdot (n-1)}, n, a, \{0, 100\}, \{-3, 3\}, 1\right)$$

$$\left\{-3, 3, \frac{1}{2}, \frac{-17}{54}, \frac{-29}{1944}, \frac{1741}{87480}, \frac{191}{944784}, \frac{-78727}{59521392}, \frac{97289}{4285540224}, \frac{33106943}{347128758144}, \frac{-119625547}{31241588232960}, \frac{-4540772081}{618583447012608}, \frac{29537512699}{66807012277361664}, \frac{4640624078437}{781642043645131468}\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{10} (c[n+1] \cdot x^n) \quad \frac{-119625547 \cdot x^{10}}{31241588232960} + \frac{33106943 \cdot x^9}{347128758144} + \frac{97289 \cdot x^8}{4285540224} - \frac{78727 \cdot x^7}{59521392} + \frac{191 \cdot x^6}{944784} + \frac{1741 \cdot x^5}{87480} - \frac{29 \cdot x^4}{1944} - \frac{17 \cdot x^3}{54} + \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x - 3$$

$$\sum_{n=0}^{10} (c[n+1] \cdot x^n) \mid_{x=1.5} \quad 1.62184$$

$$\sum_{n=0}^{20} (c[n+1] \cdot x^n) \mid_{x=1.5} \quad 1.62135$$

$$1.621347422534 \quad 1.62135$$



$$\sum_{n=0}^{50} (c[n+1] \cdot x^n)_{x=1.5} \quad 1.62135$$

1.6213475370816

1.62135

$$\sum_{n=0}^{50} (c[n+1] \cdot x^n)_{x=\frac{3}{2}} \quad \frac{34870694615818931601317043787548402178990665614561563771224612604699163984145407164323020033}{21507230139311892089614207487216557027534131444042177497907198968482855380791678707842416640}$$

34870694615818931601317043787548402178990665614561563771224612604699163984145407164323020033

1.62135

21507230139311892089614207487216557027534131444042177497907198968482855380791678707842416640

$$\text{solu}(x,m) := \sum_{n=0}^m (c[n+1] \cdot x^n) \quad \text{Terminé}$$

$$\text{solu}(1.5,20) \quad 1.62134742253$$

$$\text{solu}(1.5,50) \quad 1.62134753708$$

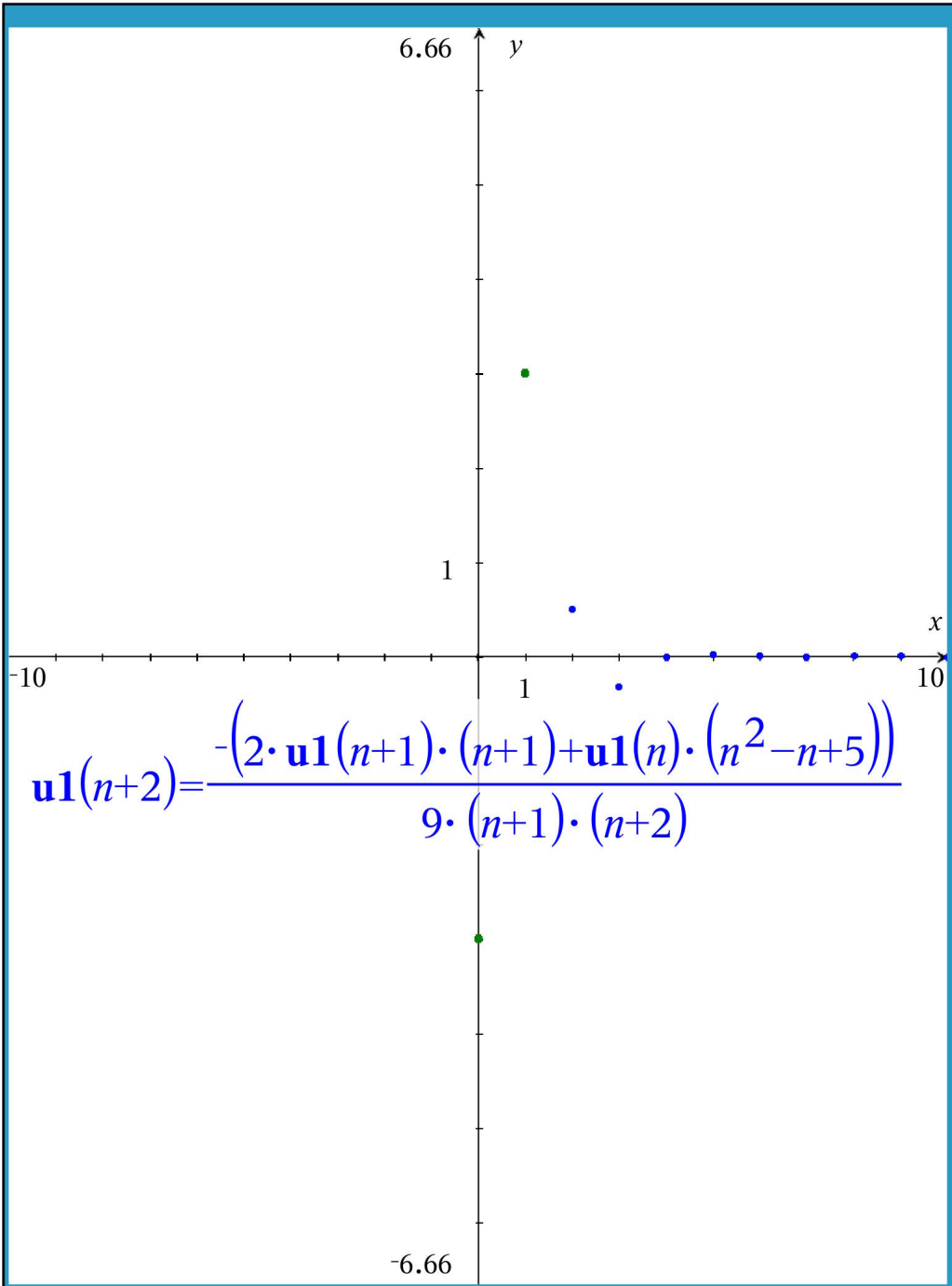
$$\text{solu}(1.5,50) - \text{solu}(1.5,20) \quad 0.000000114548$$

$$\text{solu}(1.5,90) \quad 1.62134753708$$

©ces derniers calculs sont faits en «flottant 12» au lieu de l'option par défaut «flottant 6»



Activité 4



n	u1(n)
...	...
1.	3.
2.	0.5
3.	-0.3148...
4.	-0.0149...
5.	0.019902
6.	0.000202
7.	-0.0013...
8.	0.000023
9.	0.000095
10.	-0.0000...
11.	-0.0000...
12.	4.42132...
13.	5.93702...
14.	-4.6403...
15.	-4.9887...
16.	4.71019...
17.	4.31986...
18.	-4.7235...
19.	-3.8323...
20.	4.72122...
21.	3.46809...
22.	-4.7218...
23.	-3.1909...
24.	4.73404...

$$sol(x) := \sum_{n=0}^{10} (u1(n) \cdot x^n)$$

Terminé

$$sol(1.5)$$

1.6218389

$$\sum_{n=0}^{20} (u1(n) \cdot x^n)|_{x=1.5}$$

1.6213474

$$solu(x,n) := \sum_{n=0}^n (u1(n) \cdot x^n)$$

Terminé

$$solu(1.5,20)$$

1.6213474

$$solu(1.5,10)$$

1.6218389

$$solu(1.5,20) - solu(1.5,10)$$

-0.00049147

$$solu(1.5,50) - solu(1.5,20)$$

0.00000011

©cette valeur en affichage flottant 12 est 0.000000114548



Activité 5

$$a(n) = \frac{-(2 \cdot a(n-1) \cdot (n-1) + a(n-2) \cdot (n^2 - 5 \cdot n + 11))}{9 \cdot n \cdot (n-1)}$$

$$a(n) = \frac{-(2 \cdot a(n-1) \cdot (n-1) + a(n-2) \cdot (n^2 - 5 \cdot n + 11))}{9 \cdot n \cdot (n-1)}$$

©Création d'une fonction récursive, nommons-la aa (n) qui s'appellera elle-même

$$aa(n) := \begin{cases} 0, & n < 0 \\ -3, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ \frac{-(2 \cdot aa(n-1) \cdot (n-1) + aa(n-2) \cdot (n^2 - 5 \cdot n + 11))}{9 \cdot n \cdot (n-1)}, & n > 1 \end{cases}$$

Terminé

seq(aa(n),n,0,6)

$$\left\{ -3, 3, \frac{1}{2}, \frac{-17}{54}, \frac{-29}{1944}, \frac{1741}{87480}, \frac{191}{944784} \right\}$$

aa(3)

$$\frac{-17}{54}$$

$$\sum_{n=0}^6 (aa(n) \cdot x^n)$$

$$\frac{191 \cdot x^6}{944784} + \frac{1741 \cdot x^5}{87480} - \frac{29 \cdot x^4}{1944} - \frac{17 \cdot x^3}{54} + \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x - 3$$

$$\sum_{n=0}^{20} (aa(n) \cdot x^n)$$

$$\frac{8113074557701487378863 \cdot x^{20}}{171842606884992731404233831874560} - \frac{365866778986229680517 \cdot x^{19}}{954681149361070730023521288192} - \frac{18441503833109797 \cdot x^{18}}{39041473412712989409214464} + \frac{148873264774367863 \cdot x^{17}}{34462535172950354848874496} + \frac{18036}{3829170}$$

seq(aa(n),n,0,50)

"Calcul interrompu "

