Activité 1

# Exemple de résolution par séries de puissances d'une équation d'ordre 2 avec conditions initiales en $x$=0

gilles.picard@etsmtl.ca 7 avril 2022

**Note**: les équations ou expressions écrites en noir dans cette première activité ont été volontairement non simplifiées. La plupart des écrans sont en mode «Éditeur mathématique» de Nspire, mêlant texte et calculs. Quelques écrans seront en mode «Calculs» ou «Graphiques». La dernière activité du classeur illustre quelques opérations en mode «Calculs» directement, sans explications, comme vous pourriez le faire sur votre calculatrice.

Comme on l'a vu en classe, il n'est pas nécessaire d'indiquer les indices de sommation, on n'a qu'à convenir que $\boldsymbol{a(n)=0}$ si $\boldsymbol{n<0}$ . La démarche qui suit montre ce qu'**un étudiant devrait pouvoir faire "à la main" en examen.** Nspire ne peut manipuler et simplifier les sommations ci−dessous (c'est ce que vous devriez faire vous−même manuellement). De plus, Nspire ne peut faire varier un indice.

On écrira donc par exemple $a(n+2)$ au lieu de $a_{n+2}$

Posons $y=\displaystyle\sum_{\square=\square}^{\square}\left(a(n)\cdot x^{n}\right)$ donc $y'=\displaystyle\sum_{\square=\square}^{\square}\left(n\cdot a(n)\cdot x^{n-1}\right)$ et $y''=\displaystyle\sum_{\square=\square}^{\square}\left(n\cdot(n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)$

Considérons l'équation suivante à résoudre par séries de puissances:

$\boldsymbol{\left(x^{2}+2\right)\cdot y''+2x\cdot y'+3y=0}$ **avec** $\boldsymbol{y(0)=1}$ **et** $\boldsymbol{y'(0)=2}$ **;** si on substitue les termes précédents dans cette équation, on aura:

$$\left(x^{2}+2\right)\cdot\sum_{\square=\square}^{\square}\left(n\cdot(n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)+2x\cdot\sum_{\square=\square}^{\square}\left(n\cdot a(n)\cdot x^{n-1}\right)+3\cdot\sum_{\square=\square}^{\square}\left(a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

1.1

On distribue le terme $x^{2}+2$ sur la première sommation (on obtient alors 2 sommations) et on "entre" chaque terme multipliant une sommation à l'intérieur de celle−ci:

$$\sum_{\square=\square}^{\square}\left(n\cdot(n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\cdot x^{2}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(2\cdot n\cdot(n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(2\cdot n\cdot a(n)\cdot x^{n-1}\cdot x\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(3\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

En simplifiant (combinant) les puissances de x:

$$\sum_{\square=\square}^{\square}\left(n\cdot(n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(2\cdot n\cdot(n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(2n\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(3\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

On remplace $n$ par $n+2$ dans la 2e sommation pour que tous les termes généraux soient en $x^{n}$

$$\sum_{\square=\square}^{\square}\left(n\cdot(n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)\cdot x^{n}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(2n\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum_{\square=\square}^{\square}\left(3\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

On combine les 4 sommations en une seule:

$$\sum_{\square=\square}^{\square}\left(\left(n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2n\cdot a(n)+3\cdot a(n)\right)\cdot x^{n}\right)=0$$

**La partie manuelle de la résolution s'arrête avec ce dernier résultat.** Bien sûr, pour ceux à l'aise en programmation, il serait assez facile d'automatiser cette partie de la solution, mais on vous demande ici de savoir la produire manuellement. Les calculs et opérations sont assez simples. Cette sommation sera nulle seulement si tous les coefficients de $x^{n}$ de la série sont nuls, donc on doit avoir:

$$n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2n\cdot a(n)+3\cdot a(n)=0$$

1.2

$n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2n\cdot a(n)+3\cdot a(n)=0$

On doit résoudre cette équation en fonction du coefficient avec l'indice le plus élevé. **À partir d'ici, on verra comment la calculatrice peut nous aider à résoudre la suite de ce problème**, pour trouver la formule de récurrence générant les coefficients de la série−solution. On peut utiliser la commande solve( ) pour résoudre celle−ci en fonction de $a(n+2)$ mais avec solve( ) on doit résoudre pour une variable. Et $a(n+2)$ n'est pas une variable, c'est une notation fonctionnelle, signifiant qu'on évalue la fonction $a$ en $n+2$. On remplace donc $a(n+2)$ par une variable, prenons $w$ par exemple:

$n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2\cdot n\cdot a(n)+3\cdot a(n)=0|\mathbf{a(n+2)=w}$ ▸ $2\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot w+a(n)\cdot(n^2+n+3)=0$

$\text{solve}\left(a(n)\cdot(n^2+n+3)+2\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot w=0,w\right)$ ▸ $w=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$

La formule de récurrence est donc: $a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ ou $a_{n+2}=\frac{-(n^2+n+3)a_n}{2(n+1)\cdot(n+2)}$

Pour travailler avec le logiciel, il peut être préférable d'avoir cette formule en fonction de $a(n)$. Si on veut mettre en mémoire une fonction, il faut la définir en fonction de la variable $n$. On doit remplacer dans la formule, la variable $n$ par $n-2$, pour avoir $a(n-2+2)=a(n)$ .

Avec Nspire, on doit procéder en 2 étapes, avec une variable tampon $m$ pour y arriver (évitant ainsi une définition circulaire)

on remplace $n--->m-2$ $\quad a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}|n=m-2$ ▸ $a(m)=\frac{-a(m-2)\cdot(m^2-3\cdot m+5)}{2\cdot m\cdot(m-1)}$

on remplace $m--->n$ $\quad a(m)=\frac{-a(m-2)\cdot(m^2-3\cdot m+5)}{2\cdot m\cdot(m-1)}|m=n$ ▸ $a(n)=\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)}$ donc $a_n=\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)}$

On verra dans les prochaines pages trois approches pour évaluer les coefficients $a(n)$. La première approche (activité 2) utilisera une fonction Nspire permettant de créer une liste de coefficients à partir d'une formule de récurrence. La deuxième approche (activité 3) utilisera le mode graphique suite et la formule de récurrence pour $a(n+2)$ et non celle de $a(n)$. La 3e approche (activité 4) créera une fonction récursive, mais n'est pas très efficace si on veut de nombreux coefficients. Les deux premières approches sont préférables.

## 1.3 Activité 2

**Première approche:** utiliser une fonction de Nspire qui permet de produire une liste de valeurs à partir d'une formule de récursion.

La fonction seqGen( ) a comme arguments, pour nos besoins dans ce problème : (voir documentation générale pour plus d'infos)

seqGen( la récursion $a(n)$ , l'indice $n$, le nom de la variable $a$, {$n$ de départ, $n$ final},$\{a(0),a(1)\}$ , l'incrément de $n$ )

$\text{seqGen}\left(\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)},n,a,\{0,9\},\{1,2\},1\right)$ ▸ $\left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$

On obtient ainsi les coefficients allant de $a(0)$ à $a(9)$ dans une liste. Si on met la liste en mémoire dans une variable, on peut ensuite l'interroger:

$\mathbf{c}:=\text{seqGen}\left(\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)},n,a,\{0,9\},\{1,2\},1\right)$ ▸ $\left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$

Demandons les valeurs $\mathbf{c}[1]$ ▸ $1$ et $\mathbf{c}[3]$ ▸ $\frac{-3}{4}$

On remarque que la valeur de $\mathbf{c}[1]$ correspond à $a(0)$ et $\mathbf{c}[3]$ correspond à $a(2)$ . En effet, le premier élément d'une liste correspond à la valeur $n=1$ mais pour nous, les sommations commencent à $n=0$ . Il faut donc décaler l'indice de la liste.

Pour trouver $a(n)$ , on doit demander $\mathbf{c}[n+1]$ , pour $n$ commençant à $n=0$ .

Avec une sommation, on peut construire une somme partielle de la solution.

$$\sum_{n=0}^{9}\left(\mathbf{c}[n+1]\cdot x^n\right) ▸ \frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$$

On peut mettre cette somme partielle en mémoire d'une fonction, nommons−la $\mathbf{sol}(x)$

$$\mathbf{sol}(x):=\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1 ▸ \textit{Terminé}$$

Si on met en mémoire la sommation au lieu du polynôme, les calculs seront plus longs. Nspire gardera en mémoire la sommation et non le résultat de la simplification de celle−ci. La fonction devra interroger la liste pour chaque évaluation numérique de $\mathbf{sol}(x)$ .

2.1

$\mathbf{sol}(x):=\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$ ▸ *Terminé*

$\mathbf{solu}(x):=\sum_{n=0}^{9}\left(\mathbf{c}[n+1]\cdot x^n\right)$ ▸ *Terminé*

$\mathbf{solu}(x)$ et $\mathbf{sol}(x)$ donneront les mêmes résultats numériques, mais si on doit tracer le graphe de ces solutions, $\mathbf{solu}(x)$ devra interroger la liste $\mathbf{c}[n]$ pour chaque pixel de la courbe, donc beaucoup d'opérations. $\mathbf{sol}(x)$ utilisera directement les coefficients en mémoire.

La série est développée autour de $x=0$ et les points singuliers sont $\pm\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}$ , qui sont les zéros de $x^2+2$ .

$\text{cZeros}\left(x^2+2,x\right)$ ▸ $\left\{-\sqrt{2}\cdot \boldsymbol{i},\sqrt{2}\cdot \boldsymbol{i}\right\}$ . La distance entre $x=0$ et $x=\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}$ est $\left|0-\sqrt{2}\cdot \boldsymbol{i}\right|$ ▸ $\sqrt{2}$ (idem pour l'autre racine)

La série−solution converge pour $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ . À l'écran suivant, on fait le graphe de $\mathbf{sol}(x)$ pour cet intervalle.

En prenant plus de 10 termes dans la somme partielle $\mathbf{sol}(x)$, on obtiendrait des estimés plus précis pour des valeurs de $x$ dans l'intervalle de convergence. Voir activité 3, page 5 où l'on créera une fonction $\text{sol}(x,p)$ avec $p$ étant le degré du polynôme.

Évaluons la solution (en fait la somme partielle) si $x=0.5$ et $x=1$ (2 valeurs à l'intérieur de l'intervalle de convergence)

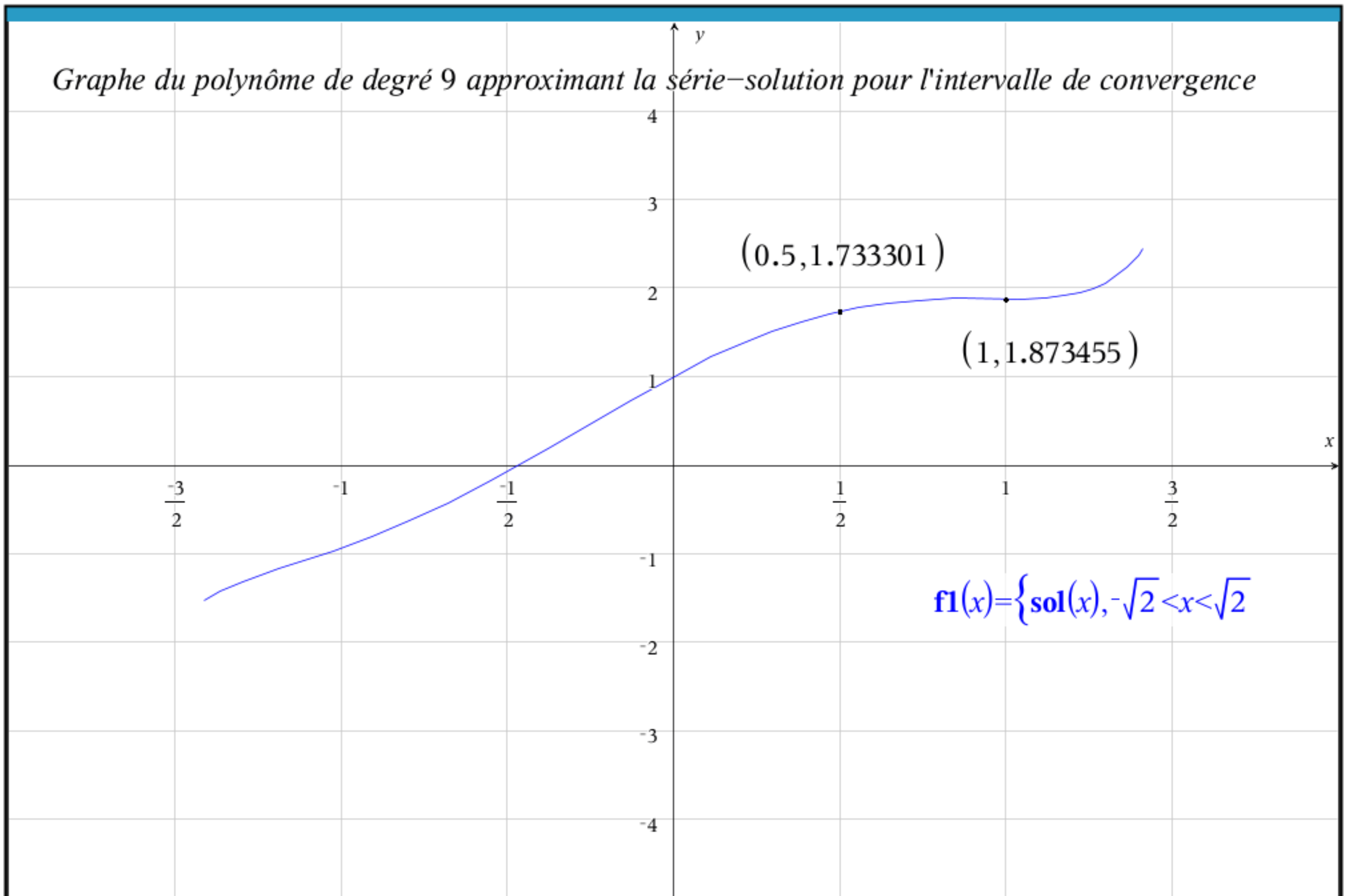
$\mathbf{sol}(0.5)$ ▸ $1.7333$ et $\mathbf{sol}(1)$ ▸ $\frac{1208603}{645120}$

On remarque que cette dernière valeur est en mode exact, car $\mathbf{sol}(x)$ ne contient aucune valeur décimale. Mon classeur est en mode «auto» ce qui nous donne des valeurs exactes si possible et des valeurs en décimales autrement. Si j'ajoute un point décimal à $x=1$ j'aurai une réponse en mode décimal (approx).

$\mathbf{sol}(1.)$ ▸ $1.87345$

Après le graphe de $\mathbf{sol}(x)$ à l'écran suivant, nous verrons d'autres approches pour le calcul des coefficients de la série−solution. Les résultats seront les mêmes, puisqu'on regardera seulement comment produire la somme partielle $\mathbf{sol}(x)$ par une autre méthode.

2.2




2.3

**Deuxième approche:** travailler en **mode graphique «Suite»**

Dans cette deuxième approche, nous prendrons avantage du fait qu'une page graphique de Nspire peut avoir plusieurs modes différents, dont le mode «Suite»

À l'écran suivant, on insère une page graphique. La présente page explique ce qu'on fait dans la page graphique qui suit.

Dans la page graphique, on choisit dans le menu: « 3: Entrée/Modification graphique-->7: Suite-->1: Suite »

La ligne de saisie en haut vous demande de fournir « $u1(n)$=??? Valeurs initiales = ??? et on indique: $1\leq n\leq 99$ »

Il est intéressant de noter que les versions plus récentes de Nspire vous permettent de changer $u1(n)$ pour $u1(n+2)$ ce qui correspond à la première version de la formule de récurrence qu'on avait trouvée à l'écran 3 (la page 1.3 dans la notation Nspire)

$$a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot\left(n^2+n+3\right)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

On peut donc saisir directement celle-ci à la ligne de saisie de la page suivante (en changeant les $a$ pour des $u1$):

$$u1(n+2)=\frac{-u1(n)\cdot\left(n^2+n+3\right)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

Pour la ligne Valeurs initiales, on saisit, séparées par une virgule, les valeurs de $u1(0)$ et $u1(1)$ qui sont nos deux conditions initiales:

Valeurs initiales:= 1,2 En général on aura Valeurs initiales:= $a(0),a(1)$

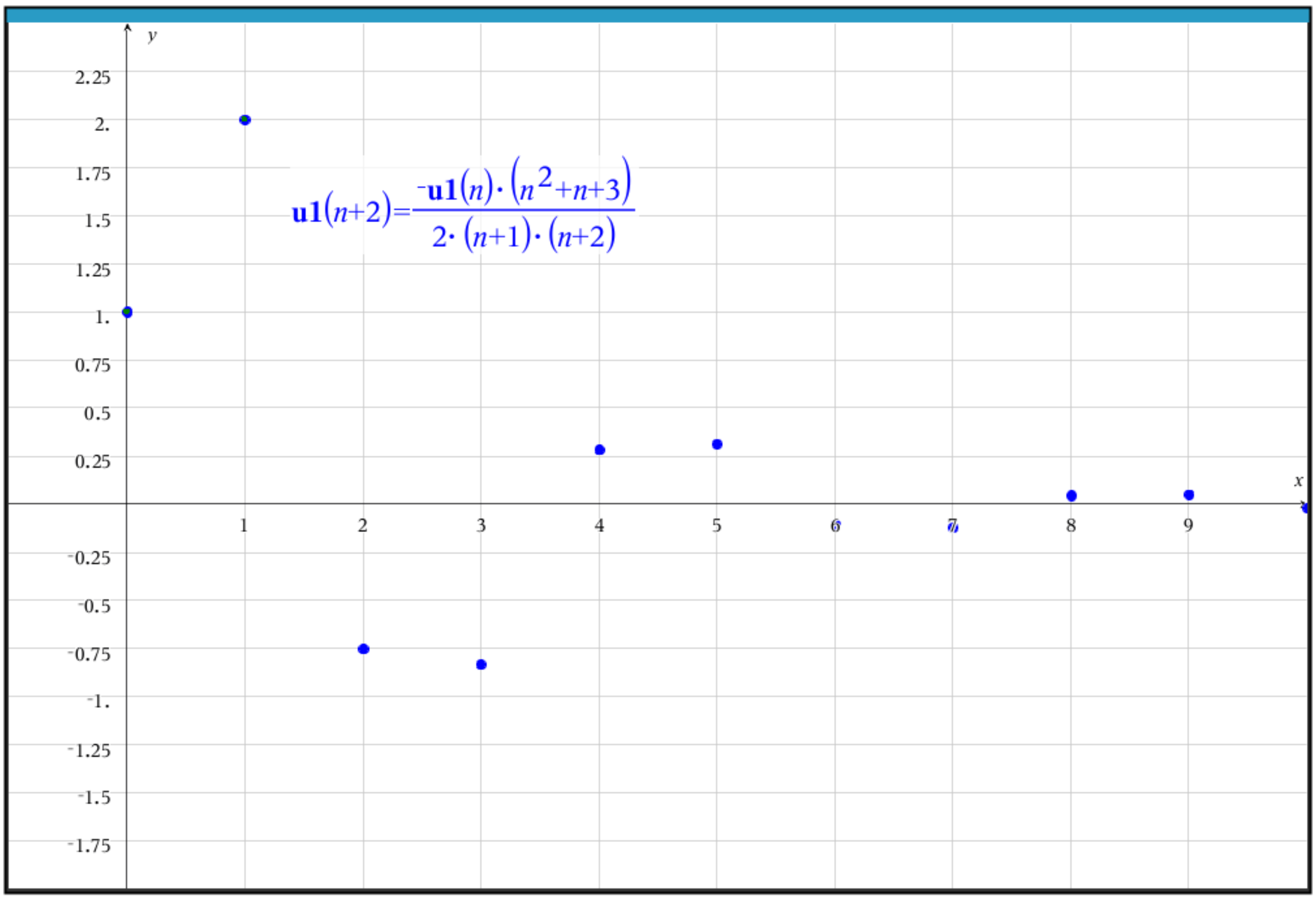
La 3e ligne nous indique qu'on fera les calculs pour $n$ allant de 1 à 99. On doit changer le début pour commencer à $n=0$ : $0\leq n\leq 99$

Après avoir saisi ces renseignements sur la page graphique, on obtient le graphe de la suite de points représentant les coefficients $u1(n)$ ou $a(n)$ (voir écran suivant)

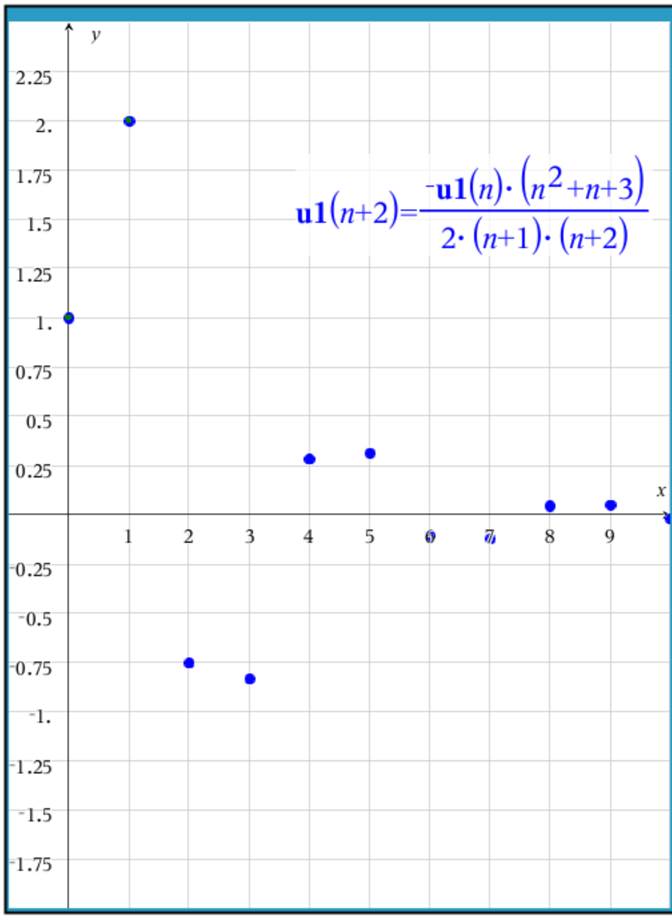
J'ai modifié les paramètres de la fenêtre pour mieux voir les points. À $x=n=0$ on a un point correspondant à $a(0)=1$. À $x=n=1$ on a un point à la hauteur $a(1)=2$. À $x=n=2$ on a un point à la hauteur $a(2)=-0.75$ etc.

Comme on l'a vu en traitant les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta avec le mode graphique «Éq. diff», on peut faire apparaitre sur la page graphique une table de valeurs correspondant au graphe en utilisant l'option «7 Tableau --> 1 Partage d'écran Table» ou en faisant «Ctrl +T» (le résultat est 2 écrans plus loin). Voir après les 2 graphes pour la suite de cette approche.

3.1




3.2




| n | u1(n) |
|---|---|
| | ... |
| 0. | 1. |
| 1. | 2. |
| 2. | -0.75 |
| 3. | -0.833333 |
| 4. | 0.28125 |
| 5. | 0.3125 |
| 6. | -0.107813 |
| 7. | -0.122768 |
| 8. | 0.043318 |
| 9. | 0.050301 |
| 10. | -0.018049 |
| 11. | -0.021263 |
| 12. | 0.007726 |
| 13. | 0.009201 |
| 14. | -0.003375 |
| 15. | -0.004053 |
| 16. | 0.001497 |
| 17. | 0.00181 |
| 18. | -0.000673 |
| 19. | -0.000818 |
| 20. | 0.000305 |
| 21. | 0.000373 |
| 22. | -0.00014 |
| 23. | -0.000171 |

1.

3.3

Comme les valeurs de $\mathbf{u1}(n)$ sont en mémoire, on peut s'en servir pour calculer les coefficients de la série−solution.

Par exemple $\mathbf{u1}(2)=\mathbf{a}(2)=-0.75$ et $\mathbf{u1}(3)=\mathbf{a}(3)=-0.833333$. Ce sont les mêmes résultats que précédemment mais en mode décimal (et non exact). On peut, avec une sommation, créer une somme partielle de la solution

$$\sum_{n=0}^{9}\left(\mathbf{u1}(n)\cdot x^n\right) \blacktriangleright 0.050301\cdot x^9+0.043318\cdot x^8-0.122768\cdot x^7-0.107813\cdot x^6+0.3125\cdot x^5+0.28125\cdot x^4-0.833333\cdot x^3-0.75\cdot x^2+2.\cdot x+1.$$

Il est ainsi facile également de prendre une borne supérieure plus élevée pour obtenir une meilleure approximation de la solution, ou des estimés plus précis de celle−ci. Le fait de travailler en mode «approx» en décimales peut aussi être souhaitable si on veut évaluer la solution à des valeurs particulières (par exemple pour $x=\sqrt{2}-1 \blacktriangleright x=0.414214$) ou lorsque qu'on veut travailler avec beaucoup de termes, quand $n$ est grand.

Avec la sommation mise en mémoire, on pourrait faire un graphe, calculer des estimés etc.

sol_9(x):= $\sum_{n=0}^{9}\left(\mathbf{u1}(n)\cdot x^n\right) \blacktriangleright 0.050301\cdot x^9+0.043318\cdot x^8-0.122768\cdot x^7-0.107813\cdot x^6+0.3125\cdot x^5+0.28125\cdot x^4-0.833333\cdot x^3-0.75\cdot x^2+2.\cdot x+1.$

$\mathbf{sol\_9}(x):=\sum_{n=0}^{9}\left(\mathbf{u1}(n)\cdot x^n\right) \blacktriangleright$ *Terminé* et $\mathbf{sol\_29}(x):=\sum_{n=0}^{29}\left(\mathbf{u1}(n)\cdot x^n\right) \blacktriangleright$ *Terminé*

Évaluons les deux fonctions en $x=1$. On trouve $\mathbf{sol\_9}(1.) \blacktriangleright 1.87345$ et $\mathbf{sol\_29}(1.) \blacktriangleright 1.84593$

La 2e valeur est plus précise que le première puisque les sommes partielles convergent vers la vraie valeur. La différence entre ces 2 valeurs nous donne un aperçu de l'erreur commise en utilisant un polynôme de degré 9 pour estimer la solution en $x=1$.

$\mathbf{sol\_59}(x):=\sum_{n=0}^{59}\left(\mathbf{u1}(n)\cdot x^n\right) \blacktriangleright$ *Terminé* et $\mathbf{sol\_59}(1.) \blacktriangleright 1.84592$

En comparant le résultat pour $\mathbf{sol\_29}(1.)$ et pour $\mathbf{sol\_59}(1.)$, on constate que les 4 premières décimales semblent précises. En effet, en arrondissant à 4 décimales ces deux dernières valeurs, on peut dire qu'en $x=1$ la solution serait 1.8459 (une solution précise à 4 décimales)

3.4

On remarque de l'écran précédent que l'on pourrait aussi créer un polynôme−solution de degré $p$ en utilisant une fonction de 2 variables:

$$\mathbf{sol}(x,p):=\sum_{n=0}^{p}\left(\mathbf{u1}(n)\cdot x^{n}\right) \blacktriangleright \textit{Terminé}$$

$\mathbf{sol}(0.5,9) \blacktriangleright 1.7333$ et $\mathbf{sol}(1.,9) \blacktriangleright 1.87345$

On retrouve 2 valeurs trouvées précédemment avec le polynôme de degré 9.

On peut facilement augmenter la précision de ces estimés en augmentant la borne supérieure de la sommation (ce qui correspond en général au degré du polynôme estimant la solution). Comme la série converge pour des valeurs de $x$ dans l'intervalle de convergence, plus on utilise une grande valeur de $p$, plus le résultat sera précis. Par exemple,

$\mathbf{sol}(1.,29) \blacktriangleright 1.84593$ $\mathbf{sol}(1.,59) \blacktriangleright 1.84592$

$\mathbf{sol}(1.,99) \blacktriangleright 1.84592$ On constate qu'en $x=1$, la valeur de la solution se stabilise à 1,84592

On pourrait également créer cette fonction de 2 variables à partir des coefficients fournis dans une liste par la commande seqGen( ).

Il faut cependant s'assurer que la liste générée contient suffisamment de termes pour les valeurs de $p$ qu'on compte utiliser.

Sur la commande suivante, on génère 100 coefficients de la série−solution:

$$\mathbf{c}:=\mathrm{seqGen}\left(\frac{^{-}a(n-2)\cdot\left(n^{2}-3\cdot n+5\right)}{2\cdot n\cdot(n-1)},n,a,\{0,99\},\{1,2\},1\right)$$

$$\mathbf{solu}(x,p):=\sum_{n=0}^{p}\left(\mathbf{c}[n+1]\cdot x^{n}\right) \blacktriangleright \textit{Terminé}$$

$\mathbf{solu}(1.,59) \blacktriangleright 1.84592$

$$\mathbf{solu}(x,9) \blacktriangleright \frac{3245\cdot x^{9}}{64512}+\frac{621\cdot x^{8}}{14336}-\frac{55\cdot x^{7}}{448}-\frac{69\cdot x^{6}}{640}+\frac{5\cdot x^{5}}{16}+\frac{9\cdot x^{4}}{32}-\frac{5\cdot x^{3}}{6}-\frac{3\cdot x^{2}}{4}+2\cdot x+1$$

3.5

Nous terminons cette activité en signalant un problème potentiel dans le calcul des coefficients de la série−solution avec la commande seqGen( ) ou avec le mode graphique Suite. Ces deux approches fonctionnent bien si la formule de récurrence permet de calculer le terme suivant en fonction des 2 termes précédents, ce qui sera en général le cas pour nos équations. Mais il peut arriver que les deux termes précédents ne suffisent pas. Voyons un exemple où l'on vous montrera comment adapter ces deux approches.

Considérons l'équation $y''+(2-x)\cdot y'-x\cdot y=0$ avec $y(0)=2$ et $y'(0)=3$. On sait que dans la solution

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ les 2 conditions initiales nous donnent $a_0=2$ et $a_1=3$

Dans cet exemple, on trouve la formule de récurrence (vérifiez ce résultat)

$a(n+2)=\dfrac{n\cdot a(n)+a(n-1)-2(n+1)\cdot a(n+1)}{(n+2)\cdot(n+1)}$. On remarque que le terme en $n+2$ dépend des termes en $n+1$, en $n$ et en $n-1$. Donc cela dépend des 3 termes précédents. Cette formule de récurrence peut aussi s'écrire (en remplaçant $n$ par $n-2$):

$a(n)=\dfrac{-2(n-1)\cdot a(n-1)+(n-2)\cdot a(n-2)+a(n-3)}{n\cdot(n-1)}$. La commande seqGen( ) va échouer ici car on ne connait que 2 valeurs initiales.

On doit donc manuellement calculer la valeur de $a_2$ pour ensuite fournir 3 valeurs initiales à la commande.

$$a(n+2)=\frac{n\cdot a(n)+a(n-1)-2\cdot(n+1)\cdot a(n+1)}{(n+2)\cdot(n+1)}|n=0 \blacktriangleright a(2)=\frac{^{-}(2\cdot a(1)-a(-1))}{2}$$

Comme on sait que les coefficients d'indice négatif sont nuls, donc $a(-1)=0$, on aura $a(2)=\dfrac{^{-}(2\cdot 3-0)}{2} \blacktriangleright a(2)=-3$

On peut maintenant utiliser la commande seqGen( ) avec la récurrence pour $a(n)$ mais en fournissant les 3 premières valeurs:

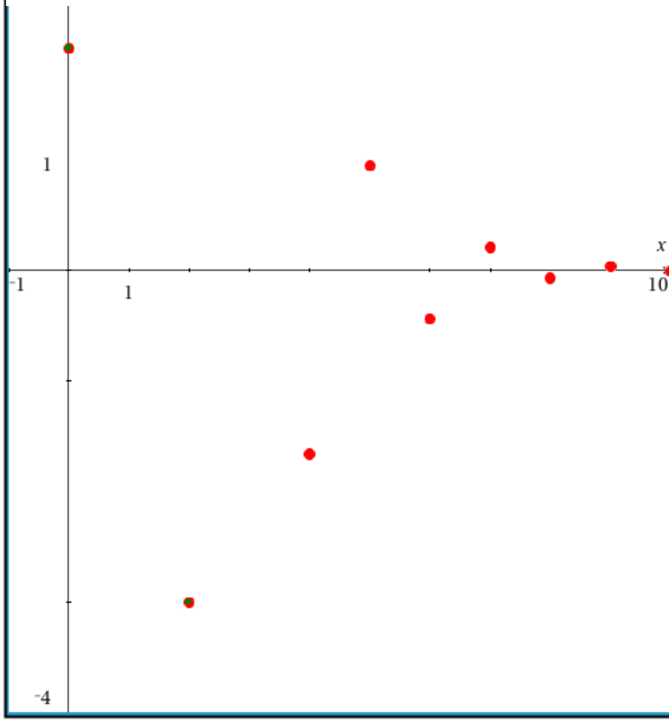
$$\mathbf{d}:=\mathrm{seqGen}\left(\frac{^{-}2\cdot(n-1)\cdot a(n-1)+(n-2)\cdot a(n-2)+a(n-3)}{n\cdot(n-1)},n,a,\{0,9\},\{2,3,-3\},1\right) \blacktriangleright \left\{2,3,-3,\frac{17}{6},\frac{-5}{3},\frac{113}{120},\frac{-53}{120},\frac{143}{720},\frac{-101}{1260},\frac{2249}{72576}\right\}$$

La solution sera estimée par le polynôme $\displaystyle\sum_{n=0}^{7}\left(\mathbf{d}[n+1]\cdot x^{n}\right) \blacktriangleright \frac{143\cdot x^{7}}{720}-\frac{53\cdot x^{6}}{120}+\frac{113\cdot x^{5}}{120}-\frac{5\cdot x^{4}}{3}+\frac{17\cdot x^{3}}{6}-3\cdot x^{2}+3\cdot x+2$

Dans le mode graphique Suite, on utiliserait également 3 valeurs initiales (voir écran suivant) pour générer les coefficients.

3.6

$$\begin{cases} \mathbf{u2}(n+2)=\dfrac{n\cdot \mathbf{u2}(n)+\mathbf{u2}(n-1)-2\cdot (n+1)\cdot \mathbf{u2}(n+1)}{(n+2)\cdot (n+1)} \\ \textit{Valeurs initiales}:=2,3,-3 \\ 0\le n\le 99 \ \ \textit{nstep}=1 \end{cases}$$




| n | u2(n) |
|---|---|
| | ... |
| 0. | 2. |
| 1. | 3. |
| 2. | -3. |
| 3. | 2.83333 |
| 4. | -1.66667 |
| 5. | 0.941667 |
| 6. | -0.4416... |
| 7. | 0.198611 |
| 8. | -0.0801... |
| 9. | 0.030988 |
| 10. | -0.0111... |
| 11. | 0.003828 |
| 12. | -0.0012... |
| 13. | 0.00039 |
| 14. | -0.0001... |
| 15. | 0.000034 |
| 16. | -0.0000... |
| 17. | 0.000003 |
| 18. | -6.6426... |
| 19. | 1.68766... |
| 20. | -4.1651... |
| 21. | 1.00199... |
| 22. | -2.3487... |
| 23. | 5.37764... |

2.

3.7

## Activité 4

**Troisième approche:** construire et mettre en mémoire une fonction calculant directement les coefficients de la série−solution.

On construit une fonction récursive (qui s'appelle elle−même) pour calculer les coefficients. Avec une fonction récursive, les calculs deviennent rapidement très lourds. En effet, la fonction n'a pas de mémoire..., donc par exemple, pour calculer $a(10)$ elle devra calculer avec sa formule et utiliser $a(8)$, mais pour calculer $a(8)$ elle doit de nouveau utiliser sa définition pour calculer $a(6)$ etc...

La fonction Nspire seqGen( ) vue dans l'approche 1 avait l'avantage de créer une liste mise en mémoire et elle pouvait utiliser les valeurs déjà calculées pour trouver les valeurs suivantes. On se souvient que la formule de récurrence était

$a(n)=\dfrac{-a(n-2)\cdot (n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot (n-1)}$ , avec $a(0)=1$ , $a(1)=2$ et $a(n)=0$ si $n<0$

Voici comment mettre en mémoire cette fonction récursive.

$$\mathbf{aa}(n):=\begin{cases} 0, & n<0 \\ 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ \dfrac{-(n^2-3\cdot n+5)\cdot \mathbf{aa}(n-2)}{2\cdot n\cdot (n-1)}, & n\ge 2 \end{cases} \ \blacktriangleright \ \textit{Terminé}$$

On a changé le nom de la fonction pour $aa(n)$ au lieu de $a(n)$ pour éviter tout conflit avec des termes déjà en mémoire. Il faut bien faire attention dans la partie droite de la fonction de modifier tous les termes avec le nom de la fonction de $a(..)$ vers $aa(..)$, la fonction doit s'appeler elle−même... On a posé $aa(n)=0$ si $n<0$, c'est une précaution qui est conséquente avec l'approche où l'on néglige les indices dans les sommations et qui permet d'éviter le problème avec les 2 approches précédentes si la récursion dépend de 3 termes précédents.

La fonction donne directement les coefficients.

$\mathbf{aa}(2) \blacktriangleright \dfrac{-3}{4}$ ou $\mathbf{aa}(3) \blacktriangleright \dfrac{-5}{6}$

On peut faire afficher les 10 premiers coefficients avec la commande seq( ) et la somme partielle de la solution

4.1

On peut faire afficher les 10 premiers coefficients avec la commande seq( ) et la somme partielle de la solution

$\mathrm{seq}(\mathbf{aa}(n),n,0,9) \blacktriangleright \left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$

$\sum_{n=0}^{9}\left(\mathbf{aa}(n)\cdot x^n\right) \blacktriangleright \frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$

C'est le même résultat qu'avec l'approche 1, mais au prix de l'utilisation d'une fonction récursive. À moins d'avoir besoin de peu de termes dans la solution, on essaie d'éviter cette approche. Si vous décidez de l'utiliser, il faut éviter de mettre en mémoire la sommation car chaque coefficient de la sommation demandera un calcul récursif de $\mathbf{aa}(n)$ , ce qui est très coûteux en nombre d'opérations...

De plus, la fonction étant récursive, vous pourriez avoir besoin de l'effacer de la mémoire avant de pouvoir faire une correction.

(en effectuant la commande delVar aa). Il peut aussi arriver qu'une activité sur la calculatrice devienne corrompue et que vous ayez besoin de recommencer vos calculs dans une nouvelle activité.

Conclusion: **on évitera si possible** cette approche!

Dans l'activité qui suit, on montre quelques−uns des calculs précédents de ce classeur, mais faits directement dans des feuilles de calculs.

4.2

Activité 5

| | |
|---|---|
| $n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2\cdot n\cdot a(n)+3\cdot a(n)=0$ | $2\cdot a(n+2)\cdot(n+1)\cdot(n+2)+a(n)\cdot(n^2+n+3)=0$ |
| $n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2\cdot n\cdot a(n)+3\cdot a(n)=0 \mid a(n+2)=w$ | $2\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot w+a(n)\cdot(n^2+n+3)=0$ |
| $\mathrm{solve}(2\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot w+a(n)\cdot(n^2+n+3)=0,w)$ | $w=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ |
| $a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ | $a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ |
| $a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)} \mid n=m-2$ | $a(m)=\frac{-a(m-2)\cdot(m^2-3\cdot m+5)}{2\cdot m\cdot(m-1)}$ |
| $a(m)=\frac{-a(m-2)\cdot(m^2-3\cdot m+5)}{2\cdot m\cdot(m-1)} \mid m=n$ | $a(n)=\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)}$ |
| $\mathrm{seqGen}\left(\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)},n,a,\{0,9\},\{1,2\},1\right)$ | $\left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$ |
| $c:=\mathrm{seqGen}\left(\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)},n,a,\{0,9\},\{1,2\},1\right)$ | $\left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$ |
| $c[1]$ | $1$ |
| $c[3]$ | $\frac{-3}{4}$ |
| $\sum_{n=0}^{9}\left(c[n+1]\cdot x^n\right)$ | $\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$ |

5.1

$sol(x):=\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$ *Terminé*

$solu(x):=\sum_{n=0}^{9}\left(c[n+1]\cdot x^n\right)$ *Terminé*

$sol(0.5)$ 1.7333

$solu(0.5)$ 1.7333

©Pour la 3e approche

$$aa(n):=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n=0\\ 2, & n=1\\ \frac{-\left(n^2-3\cdot n+5\right)\cdot aa(n-2)}{2\cdot n\cdot(n-1)}, & n\geq 2\end{cases}$$ *Terminé*

$aa(2)$ $\frac{-3}{4}$

$\text{seq}(aa(n),n,0,9)$ $\left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$

$\sum_{n=0}^{9}\left(aa(n)\cdot x^n\right)$ $\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$

$sol2(x):=\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$ *Terminé*

$sol2(0.5)$ 1.7333

5.2