Résolution par séries de puissance d'une équation d'ordre 2 avec conditions initiales en x=0

gilles.picard@etsmtl.ca 17 novembre 2016

Note: les équations ou expressions écrites en noir ont été volontairement non simplifiées. Celles écrites en bleu et qui ne sont pas simplifiées le seront (en vert) en cliquant dessus.

Comme on pourra l'avoir montré en classe, il n'est pas nécessaire d'indiquer les indices de sommation, on n'a qu'à convenir que $a(n)=0$ si $n<0$. La démarche qui suit montre ce qu'un étudiant devrait pouvoir faire "à la main" en examen.

$$y=\sum \left(a(n)\cdot x^{n}\right) \text{ et } y'=\sum \left(n\cdot a(n)\cdot x^{n-1}\right) \text{ et } y''=\sum \left(n\cdot (n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)$$

L'équation à résoudre est:

$\left(x^2+2\right)\cdot y''+2x\cdot y'+3y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=2$; si on substitue les termes précédents dans cette équation, on aura:

$$\left(x^2+2\right)\cdot \sum \left(n\cdot (n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)+2x\cdot \sum \left(n\cdot a(n)\cdot x^{n-1}\right)+3\cdot \sum \left(a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

On distribue le terme x^2+2 sur la première sommation (on obtient alors 2 sommations) et on "entre" chaque terme multipliant une sommation à l'intérieur de celles−ci:

$$\sum \left(n\cdot (n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\cdot x^2\right)+\sum \left(2\cdot n\cdot (n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)+\sum \left(2n\cdot a(n)\cdot x^{n-1}\cdot x\right)+\sum \left(3\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

En simplifiant (combinant) les puissances de x:

$$\sum \left(n\cdot (n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum \left(2\cdot n\cdot (n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n-2}\right)+\sum \left(2n\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum \left(3\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

On remplace n par $n+2$ dans la 2e sommation pour que tous les termes généraux soient en x^n

$$\sum \left(n\cdot (n-1)\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum \left(2\cdot (n+2)\cdot (n+1)\cdot a(n+2)\cdot x^{n}\right)+\sum \left(2n\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)+\sum \left(3\cdot a(n)\cdot x^{n}\right)=0$$

On combine les 4 sommations en une seule:

$$\sum \left(\left(n\cdot (n-1)\cdot a(n)+2\cdot (n+2)\cdot (n+1)\cdot a(n+2)+2n\cdot a(n)+3\cdot a(n)\right)\cdot x^{n}\right)=0$$

Cette somme sera nulle seulement si tous les coefficients de la série sont nuls, donc on doit avoir:

$n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2n\cdot a(n)+3\cdot a(n)=0$

On doit résoudre cette équation en fonction du coefficient le plus élevé. À partir d'ici, on voit comment la calculatrice peut nous aider à faire la suite de ce problème, pour trouver la formule de récurrence générant les coefficients de la série−solution. On peut utiliser la commande solve( ) pour résoudre celle−ci en fonction de $a(n+2)$ mais avec solve( ) on doit résoudre pour une variable. On remplace $a(n+2)$ par une variable, prenons p par exemple:

$n\cdot(n-1)\cdot a(n)+2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot a(n+2)+2\cdot n\cdot a(n)+3\cdot a(n)=0|a(n+2)=p \blacktriangleright a(n)\cdot(n^2+n+3)+2\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot p=0$

$\text{solve}\left(a(n)\cdot(n^2+n+3)+2\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot p=0,p\right) \blacktriangleright p=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$

La formule de récurrence est donc: $a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ ou $a_{n+2}=\frac{-(n^2+n+3)a_n}{2(n+1)\cdot(n+2)}$

Pour travailler avec le logiciel, il est préférable d'avoir cette formule en fonction de $a(n)$:

$a(n+2)=\frac{-a(n)\cdot(n^2+n+3)}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}|n=m-2 \blacktriangleright a(m)=\frac{-a(m-2)\cdot(m^2-3\cdot m+5)}{2\cdot m\cdot(m-1)}$

$a(m)=\frac{-a(m-2)\cdot(m^2-3\cdot m+5)}{2\cdot m\cdot(m-1)}|m=n$ ou $a_n=\frac{-(n^2-3\cdot n+5)\cdot a_{n-2}}{2\cdot n\cdot(n-1)}$

Activité 2

©On construit une fonction récursive (qui s'appelle elle−même) pour calculer les coefficients de la série−solution

$aa(n):=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n=0\\ 2, & n=1\\ \frac{-(n^2-3\cdot n+5)\cdot aa(n-2)}{2\cdot n\cdot(n-1)}, & n\geq 2\end{cases}$ *Terminé*

©Calculons les 10 premiers coefficients:

$\text{seq}(aa(n),n,0,9)$ $\left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$

©Voici une commande calculant les coefficients mais sans la récursion globale de aa (n)

$\text{seqGen}\left(\frac{-a(n-2)\cdot(n^2-3\cdot n+5)}{2\cdot n\cdot(n-1)},n,a,\{0,9\},\{1,2\},1\right)$ $\left\{1,2,\frac{-3}{4},\frac{-5}{6},\frac{9}{32},\frac{5}{16},\frac{-69}{640},\frac{-55}{448},\frac{621}{14336},\frac{3245}{64512}\right\}$

©On peut maintenant construire la somme partielle de la série−solution avec une sommation:

$\sum_{n=0}^{9}\left(aa(n)\cdot x^n\right)$ $\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$

©On peut mettre cette somme partielle en mémoire d'une fonction (et non la sommation elle−même pour ne pas alourdir les calculs)

$sol(x):=\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$ *Terminé*

©On peut mettre cette somme partielle en mémoire d'une fonction (et non la sommation elle−même pour ne pas alourdir les calculs)

$sol(x):=\frac{3245\cdot x^9}{64512}+\frac{621\cdot x^8}{14336}-\frac{55\cdot x^7}{448}-\frac{69\cdot x^6}{640}+\frac{5\cdot x^5}{16}+\frac{9\cdot x^4}{32}-\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{3\cdot x^2}{4}+2\cdot x+1$ *Terminé*

©La série est développé autour de x=0 et les points singuliers sont $\pm\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}$

©La série converge pour $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, à la page suivante on fait le graphe pour cet intervalle.

©Évaluons la solution si x=1 et si x=0.5 (valeurs à l'intérieur de l'intervalle de convergence)

$\{sol(1),sol(0.5)\}$ $\left\{\frac{1208603}{645120},1.7333\right\}$