Exercices supplémentaires sur la résolution par séries de puissances et sur la méthode de Runge-Kutta à l'aide de la calculatrice symbolique (version TI-Nspire CAS CX)

1-	$(x^2-4)y''+3xy'+y=0$ avec $y(0)=2$ et $y'(0)=1$ (on veut estimer $y(0,5)$)

a) pour la méthode par **séries de puissances**

La formule de récurrence est : $a_{n+2}=\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)a_n$.

La solution est $y=2+x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{64}x^4+\frac{1}{30}x^5\cdots$.

Cette série solution converge pour $|x|<2$ ou $-2<x<2$.

Si on estime avec le polynôme de degré 5, on obtient :

$$y(0,5)\approx 2+0,5+\frac{1}{4}(0,5)^2+\frac{1}{6}(0,5)^3+\frac{3}{64}(0,5)^4+\frac{1}{30}(0,5)^5=2,5873$$

b) pour la méthode avec **Runge-Kutta**

On doit transformer l'équation d'ordre 2 en un système d'équations d'ordre 1 :

$(x^2-4)y''=-3xy'-y$

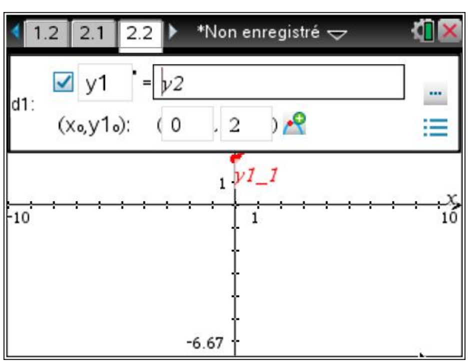
Posons $y=y_1$ et $y'=y_1'=y_2$ $\Rightarrow$ $(x^2-4)y_2'=-3xy_2-y_1$

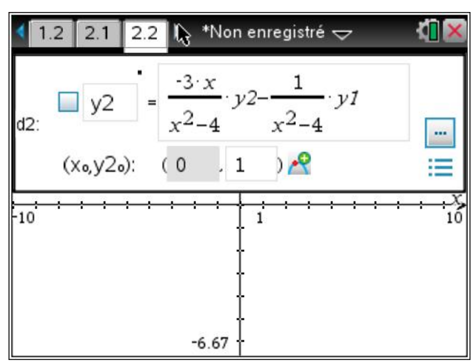
Le système, pour la TI est :

$y_1'=y_2$ avec $y_1(0)=y(0)=2$

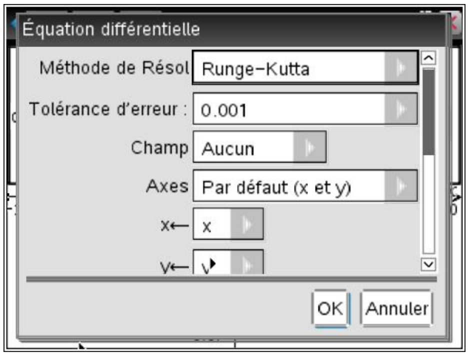
$y_2'=\frac{-3x}{x^2-4}y_2-\frac{1}{x^2-4}y_1$ avec $y_2(0)=y'(0)=1$

Les écrans suivants illustrent la solution sur une TI-Nspire CAS CX. On se met sur une page graphique et, dans le menu, pour « Entrée/modification graphique » on choisit « Éq. diff » pour accéder au mode équations différentielles.





Lorsque vous êtes sur la ligne d'entrée de l'équation, à droite de celle-ci, vous verrez un petit carré avec 3 points (…) , choisissez ceci et faites enter pour accéder aux options.



On choisit maintenant l'option Runge-Kutta pour la méthode de résolution. Conservez l'option par défaut de 0.001 pour la tolérance d'erreur et mettez l'option « Champ » à aucun si vous désirez tracer une solution obtenue par la méthode de Runge-Kutta.

Si vous mettez un crochet vis-à-vis *y1'* et *y2'* (voir fenêtres de saisie, à la page précédente) la calculatrice vous donnera la solution numérique pour la variable y et sa dérivée. Ici, nous avons choisi de demander seulement la solution pour y.

Vous pouvez consulter le document sur les champs de pente, vu au début de la session, pour plus de détails sur l'environnement graphique de résolution d'équations différentielles. Ici, on veut se concentrer sur la solution numérique voulue. Dans ce contexte :

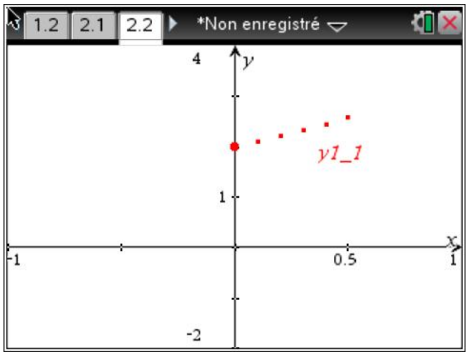
Début de tracé représente est la valeur initiale de la variable indépendante (on connaît ici $y(0)$, donc on choisit 0 pour le début du tracé.

Fin de tracé représente la valeur que l'on veut estimer (quoique l'on puisse utiliser une plus grande valeur, il vaut mieux indiquer ici la valeur cherchée, ou un peu plus grand si cette valeur finale refuse de s'afficher dans la table de valeurs), on veut un estimé de $y(0.5)$

Pas de tracé indique le nombre de pas potentiel entre *Début* et *Fin de tracé* (il vaut mieux s'assurer de mettre une valeur assurant au moins entre 10 et 50 étapes)

Tolérance d'erreur représente une mesure de l'erreur finale que l'on aimerait ne pas excéder pour obtenir notre estimé $y_1(\mathit{fin\ de\ trac\acute{e}})$. Dans cet exemple, je veux que l'estimé que cette méthode de Runge-Kutta me donnera de $y(0.5)$ ne soit pas en erreur par plus de 0,001. Cette version à pas adaptifs de la méthode de Runge-Kutta ajustera les pas à chaque étape pour voir à respecter cette tolérance. Cette version de la méthode de Runge-Kutta est différente de celle que l'on retrouve habituellement dans les manuels (qu'on appelle souvent la méthode d'ordre 4). Dans ce dernier cas, vous devriez vous-même bien contrôler les pas pour obtenir une précision donnée.

Dans les écrans qui suivent, nous voyons un graphe de la solution numérique et une table de valeurs obtenu à partir du graphe. Pour créer la table de valeurs, on demande menu-7-1 ou, on utilise le raccourci ctrl-T. On peut ensuite envoyer la table de valeurs dans une page séparée en dégroupant avec la commande doc▾-5-8 ou avec le raccourci ctrl-6.



on estime donc $y(0,5) \approx 2,5875$

2- $(1+2x^2)y'' - y = 0$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 1$ (on veut estimer $y(0,6)$)

a) pour la méthode par **<u>séries de puissances</u>**

La formule de récurrence est : $a_{n+2} = \dfrac{[1-2n(n-1)]}{(n+2)(n+1)} a_n$

La solution est $y = 4 + x + 2x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{11}{120}x^5 + \cdots$

Cette série solution converge pour $|x| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

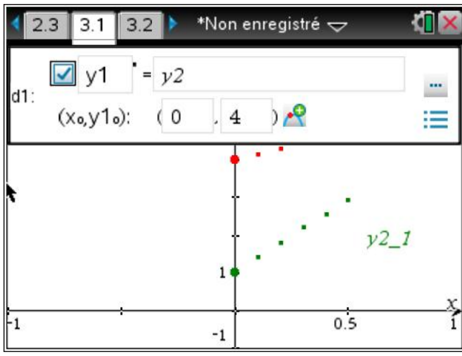
Si on estime avec le polynôme de degré 5, on obtient :

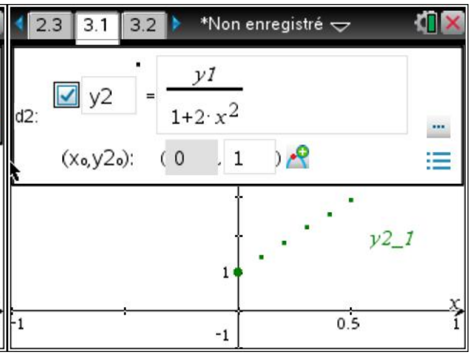
$$y(0,6) = 4 + 0,6 + 2(0,6)^2 + \frac{1}{6}(0,6)^3 - \frac{1}{2}(0,6)^4 - \frac{11}{120}(0,6)^5 = 5,284072$$

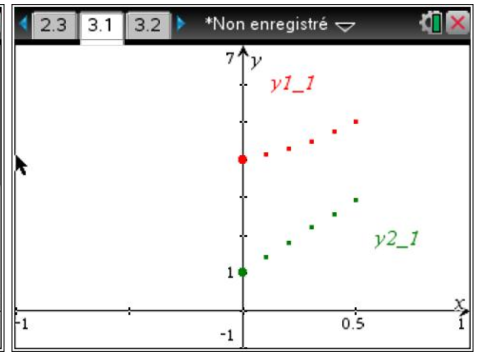
$y(0,6) \approx 5,299579$ avec un polynôme de degré 10.

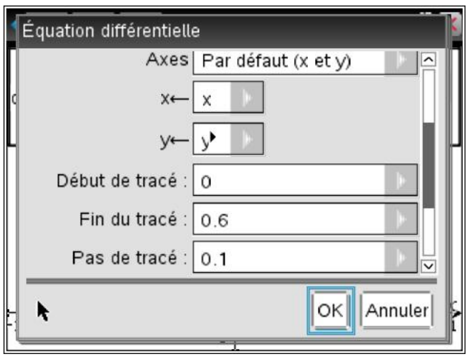
b) pour la méthode avec **<u>Runge-Kutta</u>**

Après avoir transformé l'équation en un système d'équations, on obtient :









Avec Runge-Kutta, la calculatrice donne un estimé de 5,2988

Sur le graphe, on voit en haut (les points en rouge) la solution y du problème et en bas la dérivée (les points en vert) de cette fonction, le tout tracé pour x allant de 0 à 0,6. On pourrait faire tracer plus long en augmentant la valeur de « *Fin de tracé* ».

3- $xy'' + (1+x)y = 0$ avec $y(1) = 0$ et $y'(1) = 2$ (on veut estimer $y(1,9)$)

a) pour la méthode par **séries de puissances**

La formule de récurrence est : $a_{n+2} = \dfrac{-\left[n(n+1)a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1}\right]}{(n+2)(n+1)}$

(n'oubliez pas ici que par convention, $a_m = 0$ si $m < 0$)

La solution est $y = 2(x-1) - \dfrac{2}{3}(x-1)^3 + \dfrac{1}{6}(x-1)^4 - \dfrac{1}{30}(x-1)^5 + \cdots$

Cette série solution converge pour $|x-1| < 1$ ou $0 < x < 2$

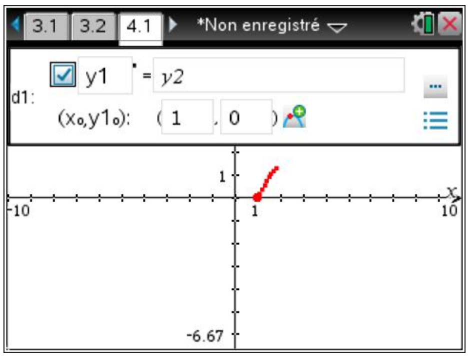
Si on estime avec le polynôme de degré 5, on obtient :

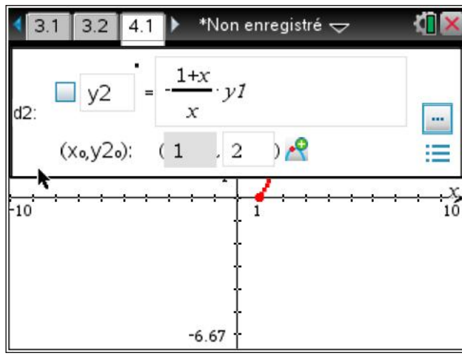
$y(1,9) = 2(1,9-1) - \dfrac{2}{3}(1,9-1)^3 + \dfrac{1}{6}(1,9-1)^4 - \dfrac{1}{30}(1,9-1)^5 = 1,403667$

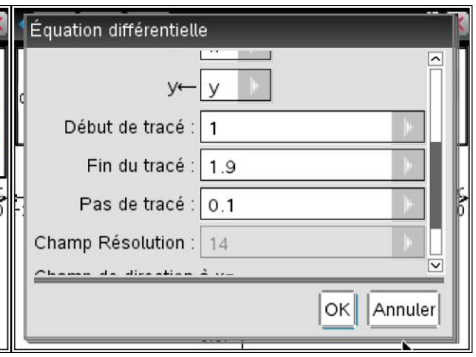
$y(1,9) \approx 1.415430$ avec un polynôme de degré 10.

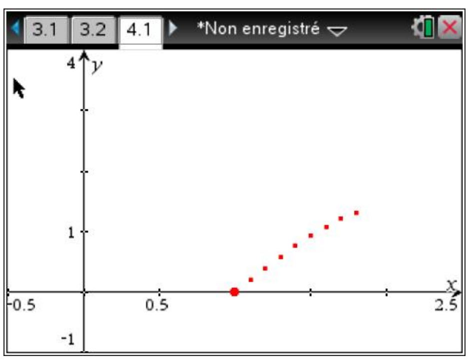
b) pour la méthode avec **<u>Runge-Kutta</u>**

On doit s'assurer de modifier la valeur de *« Début de tracé »* car les conditions initiales sont données ici en x = 1. On ajuste également les valeurs de règlages de la fenêtre d'affichage (*xmin*, *xmax*, *ymin* et *ymax)* pour s'assurer de bien voir la courbe solution. On remarque ici que l'on a sélectionné uniquement l'équation *y1'* ce qui nous donne seulement la fonction solution *y* dans la table et le graphe.









On voit ici que la calculatrice refuse de nous donner la valeur à $x = 1,9$. Pour la forcer à y arriver, j'ai changé la valeur de « *Fin de tracé* » et la valeur du « *Pas de tracé* ». Avec ces nouvelles valeurs, la calculatrice donne un estimé de 1,4131