

Chapitre 1

section 1.1 : origines et définitions de base

section 1.2 : solutions et courbes solutions

section 1.3 : méthodes numériques et champs de pentes

section 1.4 : Existence et unicité d'une solution

Section 1.1 : Origines et définitions de base

1.1

	var. ind.	var. indép.	ordre	linéaire?	coeff. const.?	homogène?
a)	t	y	2	oui	oui	oui
b)	t	x	2	oui	non, car $2tx^2$	non, car $\sin(2t)$
c)	x	y	3	non, car $y \cdot y'''$	s.o.	s.o.
d)	???	y	2	oui	oui	oui
e)	t	θ	2	oui	oui	oui
f)	t	x	1	oui	oui	non, car t^2
g)	x	y	1	non, car y^2	s.o.	s.o.
h)	t	x	4	oui	oui	non, car $-2 \cos(5t)$

1.2-a) $\frac{dQ}{dt} \propto Q$, donc $\frac{dQ}{dt} = kQ$

b) $\frac{dP}{dt} \propto P \cdot (150\,000 - P)$, donc $\frac{dP}{dt} = kP \cdot (150\,000 - P)$

c) $V_L = L \frac{di}{dt}$

d) $\frac{dP}{dT} \propto P \frac{1}{T^2}$, donc $\frac{dP}{dT} = k \frac{P}{T^2}$

e) $\frac{dH}{dt} \propto \sqrt{H}$, donc $\frac{dH}{dt} = k\sqrt{H}$

Note : « à un instant t donné » veut simplement dire que la phrase est vraie pour toutes les valeurs de t .

[RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 1](#)

Section 1.2 : solutions et courbes solutions

1.3-a) À partir de $y = e^{-x} + x - 1$, on calcule la dérivée : $y' = -e^{-x} + 1$, puis on remplace dans l'É.D. :

$$\begin{aligned} y' + y &= (-e^{-x} + 1) + (e^{-x} + x - 1) \\ &= -e^{-x} + 1 + e^{-x} + x - 1 \\ &= x \end{aligned}$$

Donc la fonction donnée est solution de l'É. D.

b)

À partir de $y = e^{-x}(1+x)$, on calcule les dérivées :

A screenshot of a calculator interface showing the function $y = e^{-x} \cdot (1+x)$ and its derivatives. The first derivative is $(x+1) \cdot e^{-x}$ and the second derivative is $-x \cdot e^{-x}$.

Puis on remplace dans l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y :$$

A screenshot of a calculator interface showing the second derivative of $y = e^{-x} \cdot (1+x)$ and the result of the differential equation $y'' - 2y' + y$. The second derivative is $(x-1) \cdot e^{-x}$ and the result of the equation is $4 \cdot x \cdot e^{-x}$.

Ça ne donne pas 0, donc la fonction donnée n'est pas solution de l'É. D.

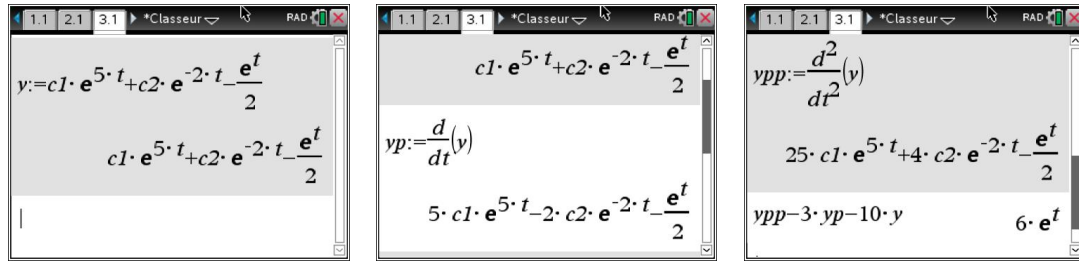
c) $x = A \cdot \cos(t+B)$,

on calcule la dérivée deuxième,
puis on additionne.

A screenshot of a calculator interface showing the function $x = a \cdot \cos(t+b)$ and its derivatives. The second derivative is $-a \cdot \cos(t+b)$ and the result of the equation $x'' + x$ is 0.

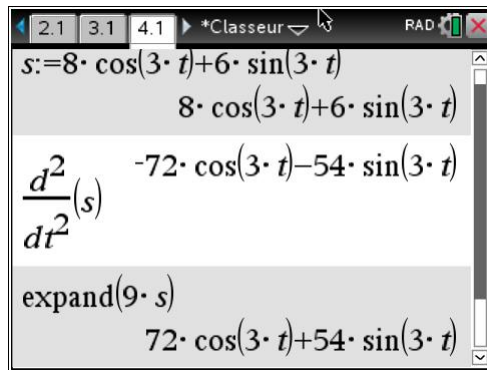
On obtient le résultat attendu (0), donc la fonction donnée est solution de l'É. D.

- d) On entre la fonction qui nous est donnée. Ensuite, on calcule les deux dérivées nécessaires, puis on finit en remplaçant nos résultats dans $y'' - 3y' - 10y$.



Comme le résultat est $6e^t$, comme dans l'équation différentielle fournie, on conclut que la fonction est solution de l'É. D.

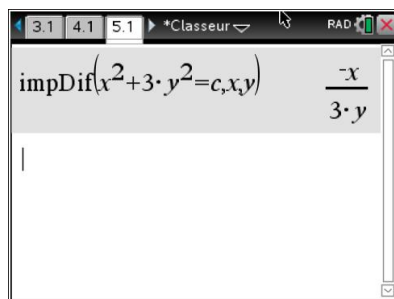
- e) On enregistre $8\cos(3t) + 6\sin(3t)$ dans s , on calcule la dérivée deuxième de s d'une part, puis $9s$ d'autre part pour voir si l'équation différentielle est satisfaite :



Remarquez que la commande « Expand » sert à faire effectuer la multiplication.

En comparant, on trouve que la fonction n'est pas solution de l'É. D.

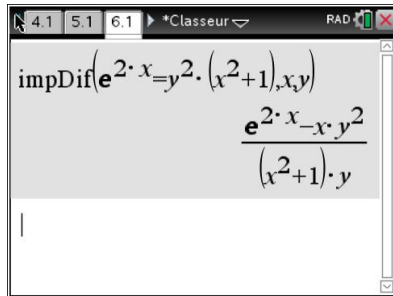
- 1.4-a) On calcule implicitement la dérivée $\frac{dy}{dx}$



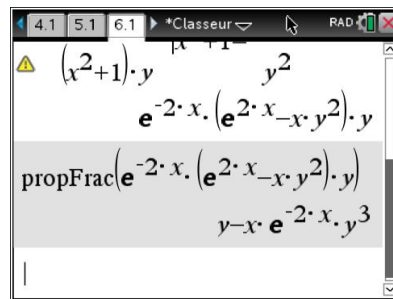
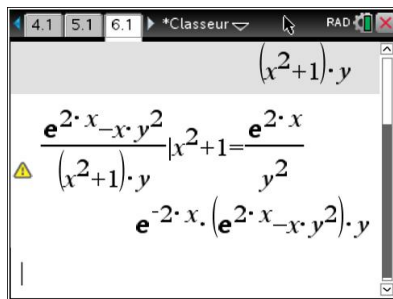
Le résultat nous dit que $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{3y}$, ce qui est l'É.D. donnée.

On a donc vérifié que la relation de départ est bien la solution implicite de l'É. D.

- b) On calcule la dérivée, implicitement :

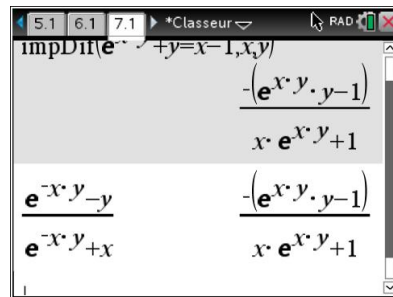
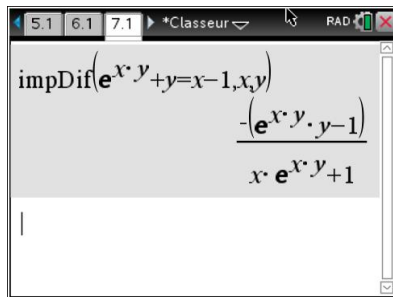


Notez que cette dérivée est égale à celle qui nous est donnée, $y - x y^3 e^{-2x}$, seulement si on est sur la courbe $e^{2x} = y^2(x^2 + 1)$. Il faut donc « dire » à la dérivée que nous sommes sur cette courbe; à cet effet, on remplace $x^2 + 1$ par $\frac{e^{2x}}{y^2}$.



On a finalement montré que la relation donnée est solution de l'É. D. Notez que la commande « PropFrac » sert à effectuer la multiplication.

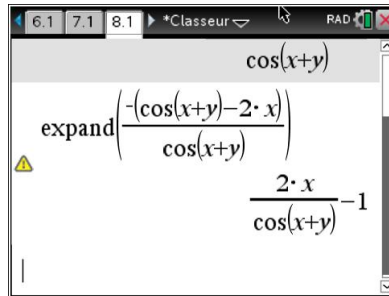
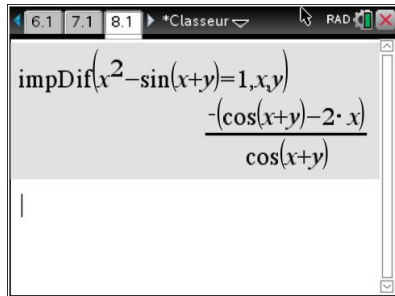
c) Dérivation implicite :



Puis on a entré dans la calculatrice, la dérivée qui était donnée dans le manuel; on voit que la calculatrice simplifie cette expression comme le résultat obtenu par dérivation. La relation donnée est donc solution de l'É. D.

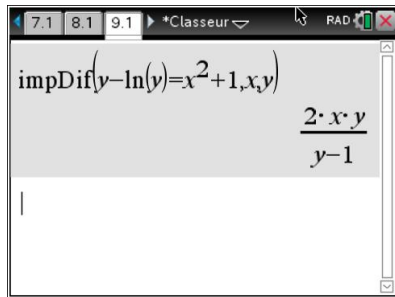
On a dû passer par là parce que la calculatrice ne donnera jamais d'exposants négatifs dans une telle expression.

d) Dérivation implicite, puis simplification :



Il reste à penser que $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ pour avoir la solution cherchée. C'est vérifié.

e) Dérivation implicite :



Vérification faite, puisqu'on arrive à l'É.D. donnée : $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}$

1.5- a) Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 14t - 28$, avec

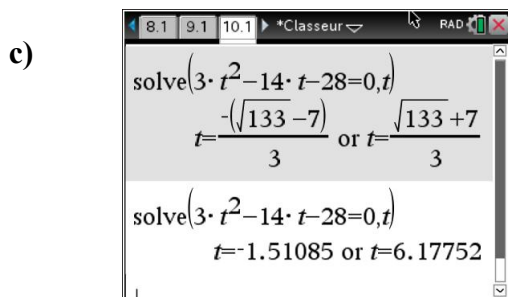
$s(0) = 160$, où s représente la position.

Pour résoudre, on intègre $s(t) = \int 3t^2 - 14t - 28 dt = t^3 - 7t^2 - 28t + C$; pour trouver la valeur de C , on remplace t par 0 et s par 160 : $C=160$.

$$s(t) = t^3 - 7t^2 - 28t + 160$$

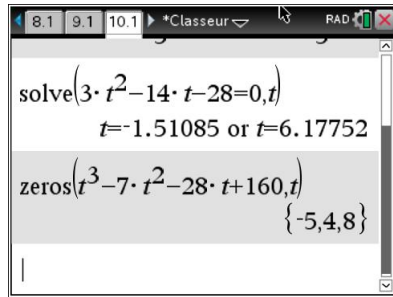
b) $s(10) = 10^3 - 7 \cdot 10^2 - 28 \cdot 10 + 160 = 180$; $v(10) = 3 \cdot 10^2 - 14 \cdot 10 - 28 = 132$.

La particule se situe 180 unités à droite de l'origine, sa vitesse est 132, et elle se dirige vers la droite puisque sa vitesse est positive.



On résout donc $v(t) = 0$, puisque la particule change de direction quand sa vitesse change de signe : on trouve $t = 6,178$. Elle change de direction à $t = 6,178$

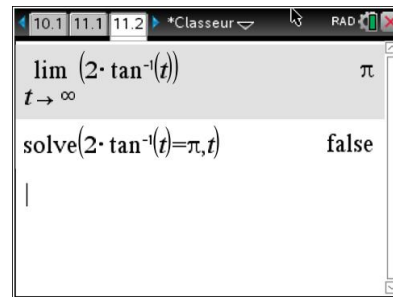
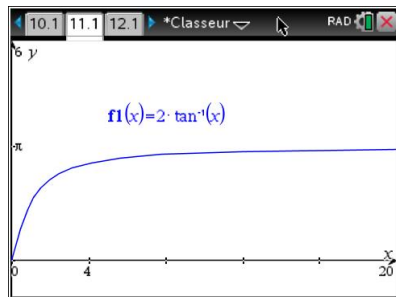
d) On cherche t (négatif puisque c'est avant qu'on commence les observations) pour que la position soit 0 :



Donc le mouvement est commencé depuis 5 unités de temps.

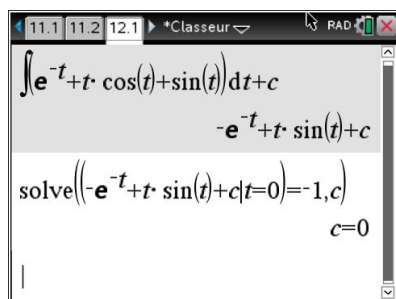
1.6- $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2 + 1}$ et $x(0) = 0$. Donc $x(t) = 2 \arctan(t) + C$ et $C = 0$. $x(t) = 2 \arctan(t)$.

Voici le graphe de $2 \arctan(t)$:

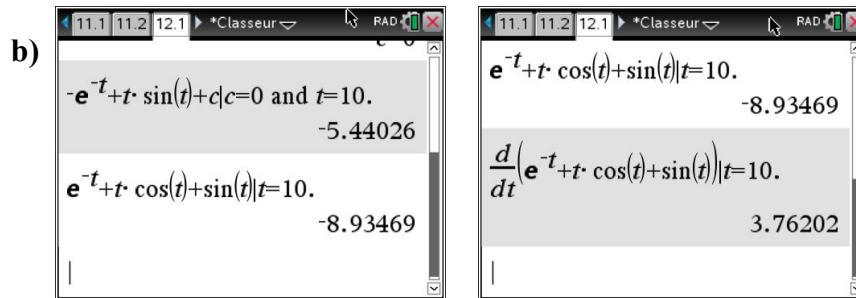


$x = \pi$ est une asymptote horizontale, et elle n'est pas atteinte; donc la particule ne dépassera jamais $x = \pi$.

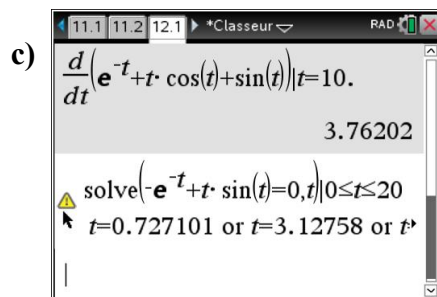
1.7- a) $\frac{dx}{dt} = e^{-t} + t \cos(t) + \sin(t)$, $x(0) = -1$.



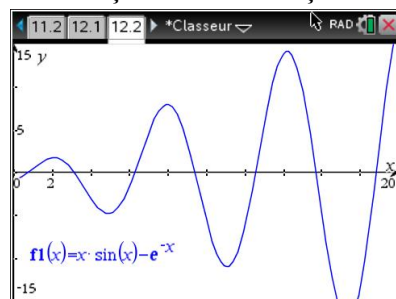
Alors $x(t) = -e^{-t} + t \sin(t)$.



La particule est 5,44 m à gauche de l'origine, sa vitesse est 8,93 m/s et elle se dirige vers la gauche. Elle ralentit puisque la vitesse et l'accélération n'ont pas le même signe.



La calculatrice donne 7 solutions, avec le message qu'il peut y en avoir d'autres. La seule façon de vérifier ça est de tracer le graphe :



On compte qu'elle traverse l'origine 7 fois.

$$\begin{aligned}
 1.8- \quad C_1 e^{5x+C_2} + C_3 e^{5x} &= C_1 e^{5x} e^{C_2} + C_3 e^{5x} \\
 &= (C_1 e^{C_2} + C_3) e^{5x} \\
 &= C e^{5x}, \text{ avec } C = C_1 e^{C_2} + C_3.
 \end{aligned}$$

Donc une seule constante arbitraire essentielle. Si c'est la solution d'une équation différentielle, cette équation différentielle est d'ordre 1.

$$\begin{aligned}
 1.9- \quad (x + C_1)^2 + C_2 &= x^2 + 2C_1 x + C_1^2 + C_2 \\
 &= x^2 + (2C_1)x + (C_1^2 + C_2) \\
 &= x^2 + k_1 x + k_2
 \end{aligned}$$

On a bel et bien deux constantes arbitraires essentielles. Si c'est la solution d'une équation différentielle, cette équation différentielle est d'ordre 2.

1.10-a) On intègre 2 fois :

$$\int \sin(2 \cdot t) dt + c1 \quad c1 - \frac{\cos(2 \cdot t)}{2}$$

$$\int \left(c1 - \frac{\cos(2 \cdot t)}{2} \right) dt + c2$$

$$\frac{-\sin(2 \cdot t)}{4} + c1 \cdot t + c2$$

Et on a obtenu

$$x(t) = \frac{-1}{4} \sin(2t) + C_1 t + C_2$$

b) On intègre une fois et on évalue la première constante d'intégration :

$$\int (2 \cdot x) dx + c1 \quad x^2 + c1$$

$$\text{solve} \left((x^2 + c1 |_{x=0}) = 10, c1 \right) \quad c1 = 10$$

$$x^2 + c1 |_{c1=10} \quad x^2 + 10$$

On a $y' = x^2 + 10$.

On intègre une autre fois et on évalue la deuxième constante.

$$\int (x^2 + 10) dx + c2 \quad \frac{x^3}{3} + 10 \cdot x + c2$$

$$\text{solve} \left(\left(\frac{x^3}{3} + 10 \cdot x + c2 \right) |_{x=0} = 0, c2 \right) \quad c2 = 0$$

$$\text{Donc } y(x) = \frac{1}{3} x^3 + 10x$$

c) On isole y'' , puis on intègre deux fois :

$$y'' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \ln(x) + C_1 x + C_2$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx + c1 \quad x - \frac{1}{x} + c1$$

$$\int \left(x - \frac{1}{x} + c1 \right) dx + c2$$

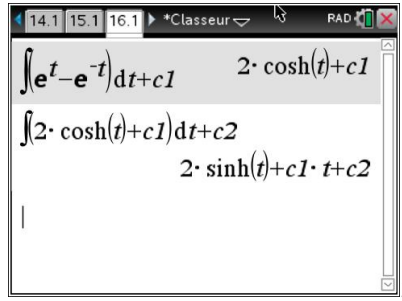
$$-\ln(x) + \frac{x^2}{2} + c1 \cdot x + c2$$

d) On isole la dérivée, puis on intègre :

$$\frac{di}{dt} = 1000 \sin(60t)$$

$$i(t) = \int 1000 \sin(60t) dt + C = C - \frac{50}{3} \cos(60t)$$

- e) Ici il faut savoir que la calculatrice « simplifie » : $e^t - e^{-t} = 2 \sinh(t)$ et $e^t + e^{-t} = 2 \cosh(t)$.

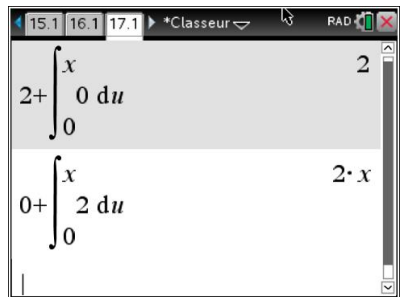


On peut aussi écrire le résultat : $x(t) = e^t - e^{-t} + C_1 t + C_2$.

- f) On intègre deux fois, avec les constantes d'intégration. Ou bien une autre façon est d'incorporer les conditions initiales en écrivant $y'(x) - y'(0) = \int_0^x y''(u) du$, donc

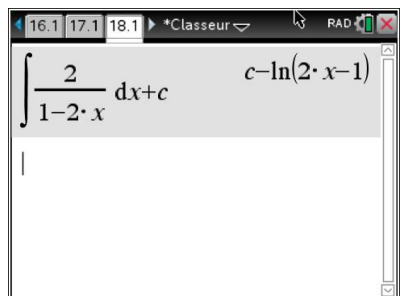
$$y'(x) = 2 + \int_0^x 0 du.$$

Puis $y(x) - y(0) = \int_0^x y'(u) du$:



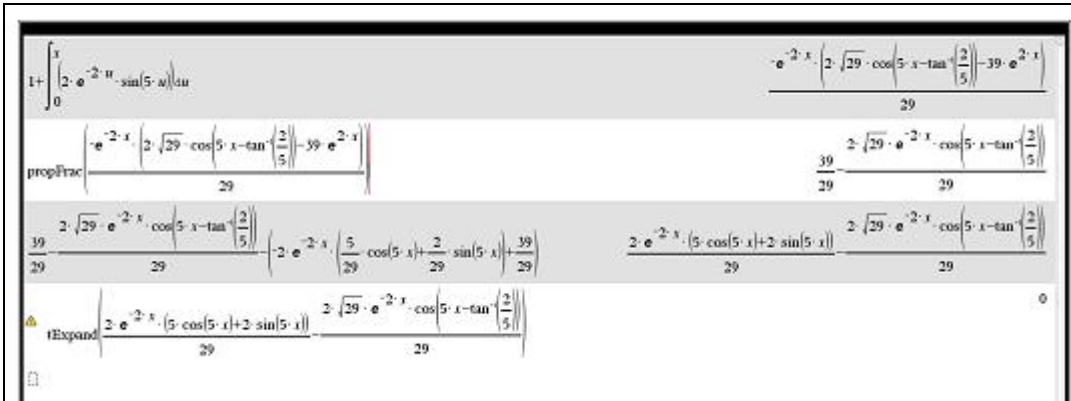
$$y(x) = 2x$$

- g) On isole la dérivée, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1-2x}$; puis on intègre :



$$y = C - \ln(2x - 1).$$

h) $y(x) - y(0) = \int_0^x y' du$, donc $y(x) = 1 + \int_0^x 2e^{-2u} \sin(5u) du$:



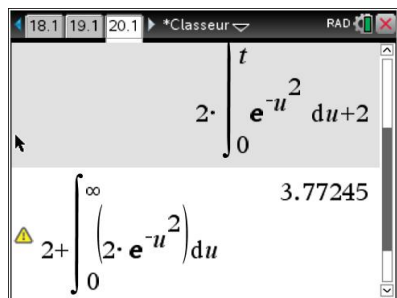
La calculatrice donne $y = \frac{39}{29} - \frac{2\sqrt{29} e^{-2x} \cos(5x - \arctan(2/5))}{29}$

$y(x) = \frac{-2}{29} e^{-2x} (5 \cos(5x) + 2 \sin(5x)) + \frac{39}{29}$ est bon aussi. On a travaillé fort pour le montrer : on a d'abord soustrait la réponse de la calculette et la réponse du manuel; puis on a utilisé les identités trigo de la calculatrice avec « tExpand ».

1.11-a) $x(t) - x(0) = \int_0^t x' du$, donc $x(t) = 2 + \int_0^t 2e^{-u^2} du$.

La fonction e^{-u^2} ne possède pas de primitive simple, donc on laisse la réponse telle quelle.

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2 + \int_0^{\infty} 2e^{-u^2} du = 3,77245$

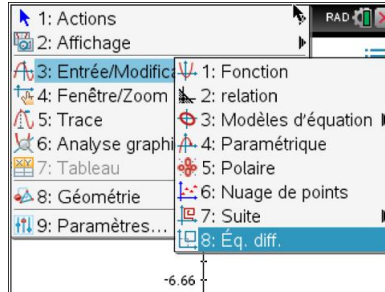


L'avertissement dit que la précision est incertaine; mais c'est bon quand même.

[RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 1](#)

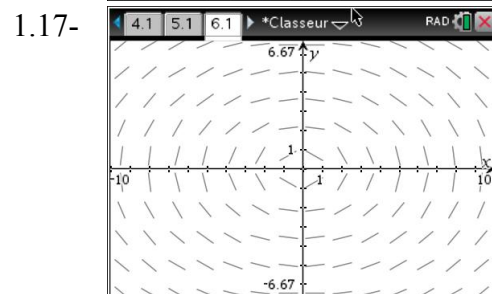
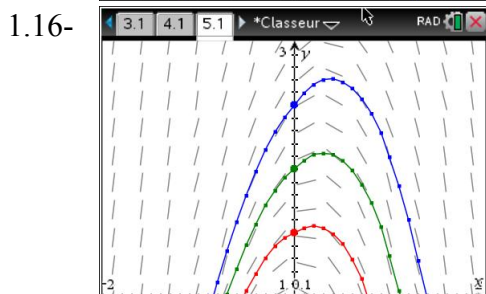
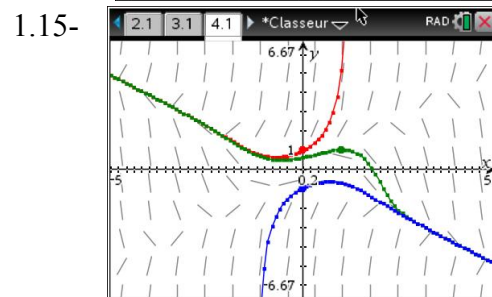
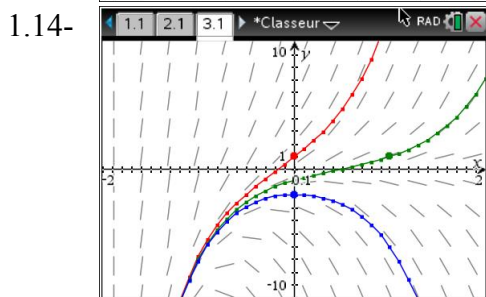
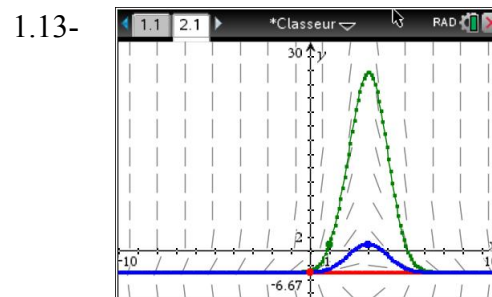
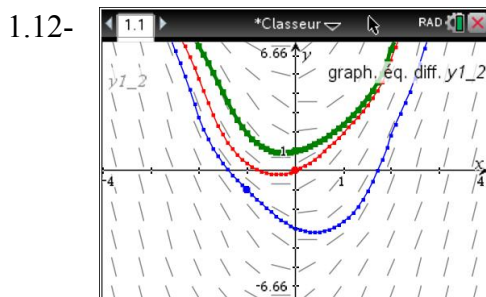
Section 1.3 : Méthodes numériques et champs de pentes

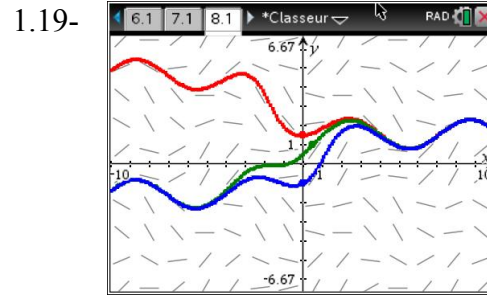
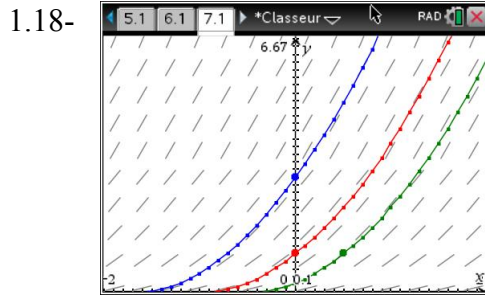
Dans les exercices 1 à 8, il faut s'assurer que la calculatrice est configurée pour les équations différentielles : dans la fenêtre graphique, **menu** **3** **8**



Par défaut, la calculatrice fournira un champ de pentes; c'est ce qui est voulu.

N'oubliez pas que la variable indépendante est x , et la variable dépendante est $y1$.





1.20- $F(x, y) = 2x + y$, $a = 0$, $b = 1$, $n = 5 \Rightarrow h = \frac{1-0}{5} = 0,2$

x_k	y_k	$m_k = F(x_k, y_k)$	$y_{k+1} = y_k + 0,2 \cdot m_k$
0	0	0	0
0,2	0	0,4	0,08
0,4	0,08	0,88	0,256
0,6	0,256	1,456	0,5472
0,8	0,5472	2,1472	0,97664
1	0,97664		

$y(1) \approx 0,97664$

1.21- $F(x, y) = \frac{y+1}{x}$, $a = 2$, $b = 1$, $n = 4 \Rightarrow h = \frac{1-2}{4} = -0,25$

x_k	y_k	$m_k = F(x_k, y_k)$	$y_{k+1} = y_k - 0,25 \cdot m_k$
2	3	2	2,5
1,75	2,5	2	2
1,5	2	2	1,5
1,25	1,5	2	1

1	1		
---	---	--	--

$$a=2, b=1, n=8 \Rightarrow h = \frac{1-2}{8} = -0,125$$

x_k	y_k	$m_k = F(x_k, y_k)$	$y_{k+1} = y_k - 0,125 \cdot m_k$
2	3	2	2,75
1,875	2,75	2	2,5
1,75	2,5	2	2,25
1,625	2,25	2	2
1,5	2	2	1,75
1,375	1,75	2	1,5
1,25	1,5	2	1,25
1,125	1,25	2	1
1	1		

Avec $n = 4$ ou $n = 8$, on obtient $y(1) = 1$.

1.22- $F(x, y) = \sqrt{y}$, $a=0, b=1, n=4 \Rightarrow h = \frac{1-0}{4} = 0,25$

x_k	y_k	$m_k = F(x_k, y_k)$	$y_{k+1} = y_k + 0,25 \cdot m_k$
0	2	1,41421	2,35355
0,25	2,35355	1,53413	2,73709
0,5	2,73709	1,65441	3,15069
0,75	3,15069	1,77502	3,59444

1	3,59444		
---	---------	--	--

$$y(1) \approx 3,59444$$

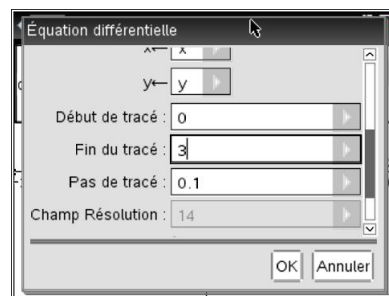
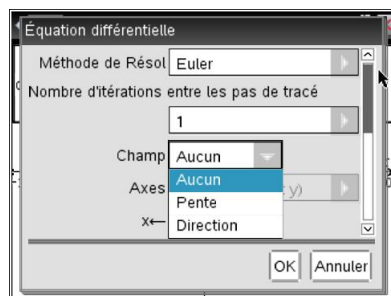
1.23- $F(x, y) = y(4 - y)$, $a = 0$, $b = 4$, $n = 5 \Rightarrow h = \frac{4 - 0}{5} = 0,8$

x_k	y_k	$m_k = F(x_k, y_k)$	$y_{k+1} = y_k + 0,8 \cdot m_k$
0	0,2	0,76	0,808
0,8	0,808	2,57914	2,87131
1,6	2,87131	3,24082	5,46397
2,4	5,46397	-7,99906	-0,93528
3,2	-0,93528	-4,61587	-4,62798
4	-4,62798		

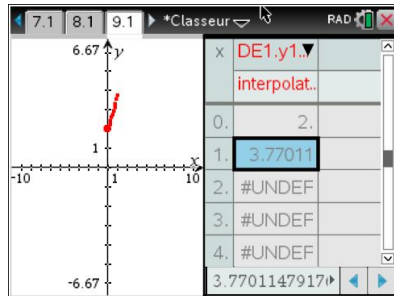
$$y(4) \approx -4,62798$$

Dans les exercices 1.24 et 1.25, on ne veut pas de champ de pentes puisque c'est une valeur de la fonction qui nous intéresse. Il faut aller dans les paramètres (...) et choisir Pentes...Aucun.

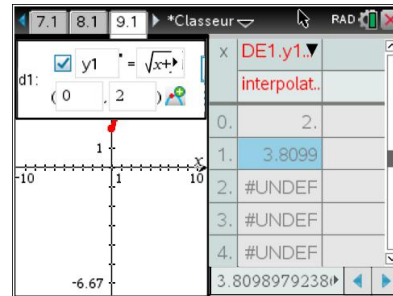
De plus, il faut donner les bonnes valeurs pour Début de tracé et Fin de tracé pour avoir l'intervalle qui nous intéresse, la condition initiale et la valeur où on cherche la fonction. Dans l'écran de droite ci-dessous, j'ai pris 0 comme valeur initiale (la condition initiale est $y(0) = \dots$) et j'ai donné 3 comme si on cherchait $y(3)$. Il faut aussi ajuster le pas de tracé pour avoir le nombre d'étapes qu'on veut; encore dans l'écran de droite, j'ai laissé la valeur par défaut qui est 0,1; mais c'est cette valeur qu'on va changer pour avoir la précision cherchée.



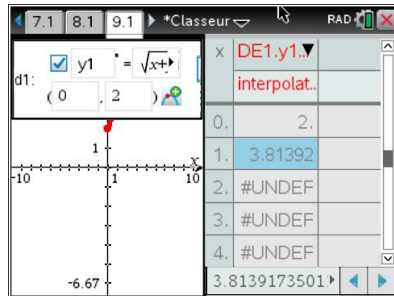
1.24-



$$h = 0,1; y(1) \approx 3,77011$$



$$h = 0.01; y(1) \approx 3,8099$$

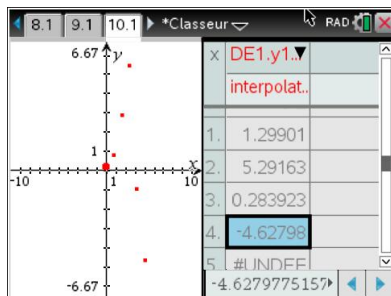


$$h = 0.001; y(1) \approx 3,81392$$

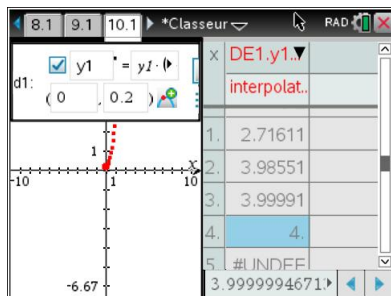
Avec 2 décimales, on a trouvé

$n=10 \Rightarrow y(1) \approx 3,77$, $n=100 \Rightarrow y(1) \approx 3,81$, et $n=1000 \Rightarrow y(1) \approx 3,81$. On conclut donc que $y(1) \approx 3,81$ et que 100 étapes suffisent pour obtenir cette valeur.

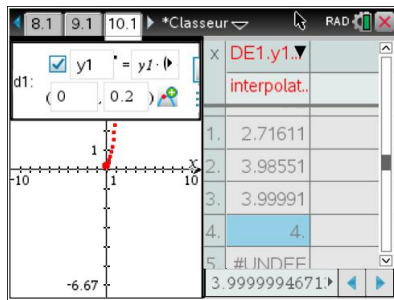
1.25-



Avec 5 étapes, $h = 0,8$ et $y(4) \approx -4,62798$, comme on l'avait vu au numéro 12.



Avec 10 étapes, $h = 0,4$ et $y(4) \approx 4$



Avec 40 étapes, $h = 0,1$ et $y(4) \approx 4$.

On conclut donc que 10 étapes suffisent pour avoir $y(4) = 4$.

[RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 1](#)

Section 1.4 : Existence et unicité d'une solution

1.26- $x_0 = 0, y_0 = 4, f(x, y) = 4x - 2y$. Alors $\frac{\partial f}{\partial y} = -2$

$f(0, 4) = -8$. Donc f existe en $(0, 4)$, et $\frac{\partial f}{\partial y}$ aussi. Oui il existe une solution, unique.

1.27- $F(t, x) = \frac{x-3t}{t-3x}, (t_0, x_0) = (3, 1), \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-8t}{(t-3x)^2}$

$F(3, 1)$ n'existe pas. Donc on ne peut pas affirmer qu'une solution unique existe pour cette É.D. avec cette condition initiale.

1.28- $f(x, y) = \frac{x}{y}, (x_0, y_0) = (0, 2), \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$

$f(0, 2) = 0, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(0,2)} = 0$. Oui il existe une solution unique.

1.29- $f(t, x) = x^{1/3}, (t_0, x_0) = (0, 0), \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^{2/3}}$.

$f(0, 0) = 0$, mais $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(t,x)=(0,0)} = \frac{1}{0}$ n'existe pas. Donc on ne peut pas affirmer qu'une solution unique existe pour cette É.D. avec cette condition initiale.

1.30- $(x_0, y_0) = (1, 1), f(x, y) = \frac{(y-1)\cos(x)}{x}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos(x)}{x}$

$f(1, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \cos(1)$ existent. Oui il existe une solution unique.

1.31- $(t_0, x_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), f(t, x) = x \operatorname{tg}(t), \frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg}(t)$

$f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ n'existe pas. Donc on ne peut pas affirmer qu'une solution unique existe pour cette É.D. avec cette condition initiale.

1.32- $f(x, y) = \frac{4y}{x^2 - 9}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2 - 9}$ n'existent pas si $x^2 - 9 = 0$, c'est-à-dire si $x = \pm 3$.

1.33- $f(t, x) = \frac{4}{x - 2t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-4}{(x - 2t)^2}$ n'existent pas si $x - 2t = 0$, donc pour $(t_0, x_0) = (k, 2k)$.

1.34- $f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$. Ces fonctions n'existent pas si $4 - (x^2 + y^2) \leq 0$, c'est-à-dire si $x^2 + y^2 \geq 4$, donc si le point (x_0, y_0) est à l'extérieur du cercle centré à l'origine de rayon 2.

1.35- $f(t, x) = \frac{\sin(x)}{t \cos(t)}$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos(x)}{t \cos(t)}$ n'existent pas si $t \cos(t) = 0$, c'est-à-dire si $t = 0$ ou bien $t = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

1.36- $x_0 = 0, y_0 = 2, f(x, y) = 2xy$ $y_3 = \frac{x^6}{3} + x^4 + 2x^2 + 2$
 $y_1 = 2 + \int_0^x 2 \cdot u \cdot 2 \, du = 2x^2 + 2$ $y_4 = \frac{x^8}{12} + \frac{x^6}{3} + x^4 + 2x^2 + 2$
 $y_2 = 2 + \int_0^x 2 \cdot u \cdot (2u^2 + 2) \, du = x^4 + 2x^2 + 2$

$f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$	Terminé
$2 + \int_0^x f(u, 2) \, du$	$2 \cdot x^2 + 2$
$2 + \int_0^x f(u, 2 \cdot x^2 + 2 x-u) \, du$	$x^4 + 2 \cdot x^2 + 2$
$2 + \int_0^x f(u, \frac{x^6}{3} + 2 \cdot x^2 + 2 x-u) \, du$	$\frac{x^6}{3} + x^4 + 2 \cdot x^2 + 2$
$2 + \int_0^x f(u, \frac{x^8}{12} + \frac{x^6}{3} + 2 \cdot x^2 + 2 x-u) \, du$	$\frac{x^8}{12} + \frac{x^6}{3} + x^4 + 2 \cdot x^2 + 2$

On demande $2 + \int_0^x f(u, 2) \, du$. Puis pour toutes les autres on peut passer la

commande $2 + \int_0^x f(u, ans | x = u) \, du$, de sorte qu'on peut faire , , etc.

1.37- $x_0 = 0, y_0 = 1, f(x, y) = y$

$$y_1 = 1 + \int_0^x 1 du = x + 1$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x u + 1 du = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \frac{u^2}{2} + u + 1 du = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$y_4 = 1 + \int_0^x \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + u + 1 du = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$f(x,y) = y$	Terminé
$1 + \int_0^x f(u,1) du$	$x+1$
$1 + \int_0^x f(u,x+1) du$	$\frac{x^2}{2} + x + 1$
$1 + \int_0^x f(u, \frac{x^2}{2} + x + 1) du$	$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$
$1 + \int_0^x f(u, \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1) du$	$\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$
<code>deSolve(y'=y and y(0)=1,x,y)</code>	$y=e^x$
<code>taylor(e^x,x,4)</code>	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$

La vraie solution est $y = e^x$ et le développement en polynôme de Taylor donne le même résultat que les itérations de Picard.

1.38- $x_0 = 0, y_0 = 1, f(x, y) = x^2 + y^2$

$$y_1 = 1 + \int_0^x u^2 + 1^2 du = \frac{x^3}{3} + x + 1$$

$$y_2 = \frac{x^7}{63} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

$$y_3 = \frac{x^{15}}{59535} + \frac{4x^{13}}{12285} + \frac{x^{12}}{2268} + \frac{184x^{11}}{51975} + \frac{4x^{10}}{525} + \frac{299x^9}{11340} + \frac{41x^8}{630} + \frac{47x^7}{315} + \frac{29x^6}{90} + \frac{8x^5}{15} + \dots$$

$$+ \frac{5x^4}{6} + \frac{4x^3}{3} + x^2 + x + 1$$

$f(x,y) = -x^2 + y^2$	Terminé
$1 + \int_0^x f(u,1) du$	$\frac{x^3}{3} + x + 1$
$1 + \int_0^x f\left(u, \frac{x^3}{3} + x + 1 x=u\right) du$	$\frac{x^7}{63} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{x^4}{6} + \frac{2 \cdot x^3}{3} + x^2 + x + 1$
$1 + \int_0^x f\left(u, \frac{x^7}{63} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{x^4}{6} + \frac{2 \cdot x^3}{3} + x^2 + x + 1 x=u\right) du$	$\frac{x^{15}}{59535} + \frac{4 \cdot x^{13}}{12285} + \frac{x^{12}}{2268} + \frac{184 \cdot x^{11}}{51975} + \frac{4 \cdot x^{10}}{525} + \frac{299 \cdot x^9}{11340} + \frac{41 \cdot x^8}{630} + \frac{47 \cdot x^7}{315} + \frac{29 \cdot x^6}{90} + \frac{8 \cdot x^5}{15} + \frac{5 \cdot x^4}{6} + \frac{4 \cdot x^3}{3} + x^2 + x + 1$

1.39- $x_0 = 0, y_0 = 0, f(x, y) = x^2 + y$

$$y_3 = \int_0^x u^2 + \frac{u^4}{12} + \frac{u^3}{3} du = \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}$$

$$y_1 = 0 + \int_0^x u^2 + 0 du = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2 = \int_0^x u^2 + \frac{u^3}{3} du = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}$$

$$y_4 = \int_0^x u^2 + \frac{u^5}{60} + \frac{u^4}{12} + \frac{u^3}{3} du = \frac{x^6}{360} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}$$

$f(x,y) = -x^2 + y$	Terminé
$0 + \int_0^x f(u,0) du$	$\frac{x^3}{3}$
expand $\left(0 + \int_0^x f\left(u, \frac{x^3}{3} x=u\right) du \right)$	$\frac{4 \cdot x^3}{12 \cdot 3}$
expand $\left(0 + \int_0^x f\left(u, \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} x=u\right) du \right)$	$\frac{x^5}{60} + \frac{4 \cdot x^3}{12 \cdot 3}$
expand $\left(0 + \int_0^x f\left(u, \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} x=u\right) du \right)$	$\frac{x^6}{360} + \frac{x^5}{60} + \frac{4 \cdot x^3}{12 \cdot 3}$
deSolve($y' = -x^2 + y$ and $y(0) = 0, x, y$)	$y = 2 \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x - 2$
taylor($2 \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x - 2, x, 6$)	$\frac{x^3}{3} + \frac{4 \cdot x^3}{12} + \frac{5 \cdot x^3}{60} + \frac{x^3}{360}$

Ici on a utilisé la commande « Expand » parce que la calculatrice aurait donné les réponses en factorisant, ce qui est un peu moins lisible.

La solution exacte est $y = 2e^{-x^2} - x^2 - 2x - 2$; Taylor donne la même chose que Picard.

[RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 1](#)