HIV-2024 DEVOIR 4 groupe 06
MAT-265 enseignant: Gilles Picard

Vous devez faire ce devoir **avec les équipes déjà formées (voir SIGNETS ou Moodle)**.

Vous remettrez une copie PDF par équipe, via Moodle, au plus tard à 13h00 le 9 avril 2024

Les graphes demandés doivent être **produits et imprimés (PDF) avec le logiciel Nspire.**

Vous devez indiquer quelles opérations sont faites avec la calculatrice et les résultats obtenus.

1- Un circuit électrique est constitué d'une bobine, d'une résistance et d'un condensateur en série avec une source. À partir de $t = 0$, on ferme l'interrupteur et on fournit une source de $10 \cdot \cos(100t)$ volts. La bobine a une inductance de 0,1 henry, la résistance est de 10 ohms, et le condensateur a une capacitance de 400 micro-farads. Considérez que $v_C(0) = 2$ volt et $i(0) = 0$

a) Posez l'équation qui correspond à ce circuit. Faites-la résoudre par votre calculatrice à l'aide de la commande « solved » du programme ETS_specfunc. Donnez $v_C(t)$.

b) Tracez le graphe de cette solution. Utilisez un intervalle permettant de bien voir la solution, autant la partie transitoire au début que le régime permanent par la suite. Déterminez le voltage maximum (en valeur absolue) aux bornes du condensateur (solution graphique acceptée si le point est sur votre graphe) et le moment où cela se produit.

c) Que vaut $v_C(t)$ en régime permanent? Quelle est l'amplitude de ce régime permanent (solution non-graphique)? Donnez également le régime permanent du courant électrique $i(t)$ et son amplitude.

2- Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients variables suivante :

$$\left(x^2+6\right)y''+3y'-5y=0 \text{, avec les conditions initiales } y(0)=4 \text{ et } y'(0)=-4.$$

a) Résolvez cette équation différentielle par série de puissances, et donnez la solution avec les 6 premiers termes non nuls.

Vous devez fournir la formule de récurrence et le détail de vos calculs.

b) Quel est l'intervalle de convergence de la série trouvée en a)?

c) Tracez le graphique de $y(x)$, en utilisant les 6 premiers termes trouvés en a), pour x **dans l'intervalle de convergence**.

d) Donnez un estimé (arrondi à 4 décimales) de la valeur de $y(1,5)$ en utilisant la solution trouvée en a).

e) Donnez un estimé (arrondi à 4 décimales) de la valeur de $y(1,5)$ en utilisant plutôt les polynômes solutions de degré 10, 20 et 40. Donnez seulement les 3 estimés demandés. Commentez la précision des résultats obtenus.

f) Supposons maintenant que les conditions initiales sont plutôt données en $x = 3$. Quel serait l'intervalle de convergence de la série solution? (on vous demande seulement l'intervalle de convergence, pas la solution de l'équation différentielle)

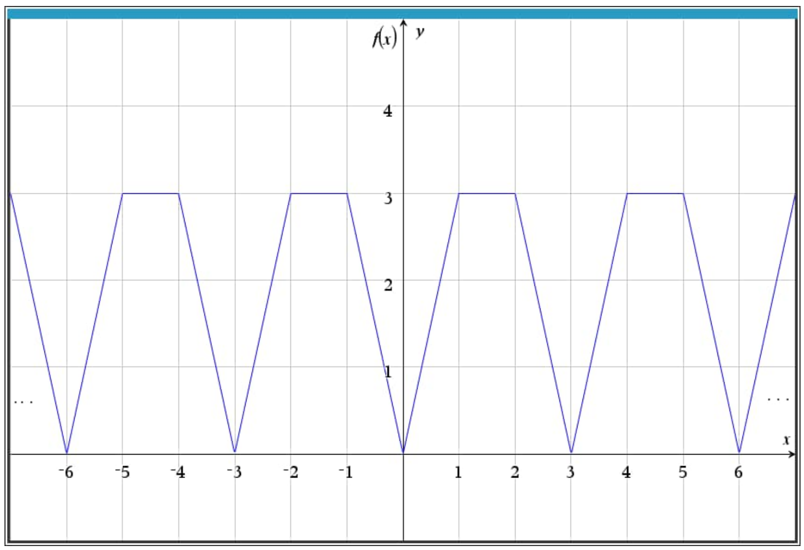
3- Considérons de nouveau l'équation différentielle linéaire du numéro 2 :

$$\left(x^2+6\right)y''+3y'-5y=0\text{, avec les conditions initiales } y(0)=4 \text{ et } y'(0)=-4.$$

a) Appliquez la méthode de Runge-Kutta (BS23) sur votre calculatrice pour estimer $y(1,5)$. Indiquez le système d'équations d'ordre 1 utilisé et donnez votre estimé de $y(1,5)$ avec 4 décimales. Vous prendrez un *pas de tracé* de 0,1 et vous poserez le *Début de tracé* à $x=0$ et la *Fin de tracé* à $x=1,5$ la valeur pour laquelle on veut un estimé. Faites le calcul avec une *Tolérance d'erreur* de $tol=0,001$.

b) Que devient votre estimé en posant plutôt une *Tolérance d'erreur* de $tol=0,0001$? Et avec $tol=0,00001$? Comparez avec vos réponses au numéro 2.

4- Considérez la fonction périodique $f(x)$ suivante.



a) Calculez la série de Fourier de cette fonction périodique. Fournissez les intégrales à évaluer et les résultats obtenus. Indiquez la forme simplifiée des coefficients a_n et b_n. Donnez une somme partielle d'ordre $n=5$.

b) Fournissez un graphique de la fonction périodique et de la somme partielle trouvée en a) pour *x* allant de -8 à 8.

c) Refaites le graphe demandé en b) mais avec une somme partielle d'ordre 10.

5- Considérons la fonction $f(x)=4-2x$ définie sur l'intervalle $0<x<2$. Faites un prolongement périodique impair de cette fonction.

a) Calculez la série de Fourier de la fonction périodique obtenue avec ce prolongement. Fournissez la ou les intégrales à évaluer et les résultats obtenus. Indiquez la forme simplifiée des coefficients a_n et b_n. Donnez une somme partielle d'ordre $n=6$.

b) Fournissez un graphique de la fonction périodique et de la somme partielle trouvée en a) pour *x* allant de -10 à 10.

c) Refaites le graphe demandé en b) mais avec une somme partielle d'ordre 25.