

AVERTISSEMENT : Il y a souvent plusieurs façons pour résoudre un problème. Nous n'en indiquons qu'une, et ce n'est pas nécessairement la plus facile, ni la plus rapide.

1. a) $f(t) = (5t+3)(2t-7) = 10t^2 - 29t - 21$

$$\mathcal{L}\{10t^2 - 29t - 21\} = 10\frac{2}{s^3} - 29\frac{1}{s^2} - 21\frac{1}{s} = \frac{20}{s^3} - \frac{29}{s^2} - \frac{21}{s} \text{ avec P3 } n=2, \text{ P2 et P1.}$$

b) $g(t) = 5t^3 e^{-2t} + 4t \cos(5t)$

Pour le premier terme, on utilise P20, $n = 3$, $f(t) = 5e^{-2t}$ puis P4 pour $f(t)$

Pour le deuxième terme, on prendra P11, $\omega = 5$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{5}{s+2} \right) + 4 \frac{s^2 - 5^2}{(s^2 + 25)^2} \\ &= \frac{30}{(s+2)^4} + \frac{4(s^2 - 25)}{(s^2 + 25)^2} \end{aligned}$$

2.a)
$$h(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < t < 4 \\ 4 - \frac{t}{2} & \text{si } 4 < t < 12 \\ 0 & \text{si } t > 12 \end{cases}$$

Donc $h(t) = 2u(t) + \left(2 - \frac{t}{2}\right)u(t-4) + \left(\frac{t}{2} - 4\right)u(t-12)$

b) Pour le premier terme, on utilisera P1.

Pour les deux autres, ce sera P21.

$$\mathcal{L}\{2u(t)\} = \frac{2}{s}$$

$$a = 4, g(t) = 2 - \frac{t}{2}; g(t+4) = -\frac{t}{2};$$

$$\mathcal{L}\left\{\left(2 - \frac{t}{2}\right)u(t-4)\right\} = e^{-4s} \left(\frac{-1}{2s^2}\right) \text{ avec P2}$$

$$a = 12, g(t) = \frac{t}{2} - 4; g(t+12) = \frac{t}{2} + 2;$$

$$\mathcal{L}\left\{\left(\frac{t}{2} - 4\right)u(t-12)\right\} = e^{-12s} \left(\frac{1}{2s^2} + \frac{2}{s}\right) \text{ avec P2 et P1}$$

Finalement $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{e^{-4s}}{2s^2} + e^{-12s} \left(\frac{1}{2s^2} + \frac{2}{s}\right)$

3.a)
$$F(s) = \frac{5s^2 + 22s - 117}{2s^3 + 13s^2 + 96s + 45} = \frac{4s + 18}{s^2 + 6s + 45} - \frac{3}{2s + 1}$$

On complète le carré pour le premier terme : $s^2 + 6s + 45 = (s+3)^2 + 36$

$$F(s) = \frac{4s+18}{(s+3)^2+36} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{2}} = \frac{4(s+3)}{(s+3)^2+36} + \frac{6}{(s+3)^2+36} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

avec P9 et P8 pour les 2 premiers, $a=3$, $\omega=6$; puis P4 pour le dernier $a=\frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4e^{-3t} \cos(6t) + e^{-3t} \sin(6t) - \frac{3}{2}e^{-t/2}$$

b) On utilise P22;

$$a = \frac{\pi}{2}; F(s) = \frac{(3s-5)}{2s^2(s^2+25)} = \frac{-3s}{50(s^2+25)} + \frac{1}{10(s^2+25)} + \frac{3}{50} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Pour avoir $f(t)$, on passe par P9, P27, P1 et P2 :

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-3s}{50(s^2+25)} + \frac{1}{10(s^2+25)} + \frac{3}{50} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= \frac{-3}{50} \cos(5t) + \frac{1}{50} \sin(5t) + \frac{3}{50} - \frac{t}{10} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(3s-5)e^{-\pi s/2}}{2s^2(s^2+25)} \right\} &= f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{50} \cos(5t) - \frac{3}{50} \sin(5t) - \frac{1}{10}t + \frac{\pi}{20} + \frac{3}{50} \right) \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

4. $y'' + 9y' + 14y = 2\delta(t-1) - \delta(t-2)$

$$\mathcal{L}\{y'' + 9y' + 14y\} = \mathcal{L}\{2\delta(t-1) - \delta(t-2)\}$$

On pose $\mathcal{L}\{y\} = Y$, alors $\mathcal{L}\{y'\} = s \cdot Y - y(0) = s \cdot Y$ par P16, et

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot Y$ par P17.

$$\mathcal{L}\{y''\} + 9\mathcal{L}\{y'\} + 14\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{2\delta(t-1)\} - \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$

$s^2 \cdot Y + 9s \cdot Y + 14Y = 2e^{-s} - e^{-2s}$, avec P15, le premier $a=1$ et le deuxième $a=2$.

$$Y = \frac{2e^{-s}}{s^2+9s+14} - \frac{e^{-2s}}{s^2+9s+14}$$

Avec P22, le premier $a=1$ et le deuxième $a=2$;

$$\text{pour le premier : } F_1(s) = \frac{2}{s^2+9s+14} = \frac{2}{5} \frac{1}{s+2} - \frac{2}{5} \frac{1}{s+7}$$

$$f_1(t) = \frac{2}{5}e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{-7t}$$

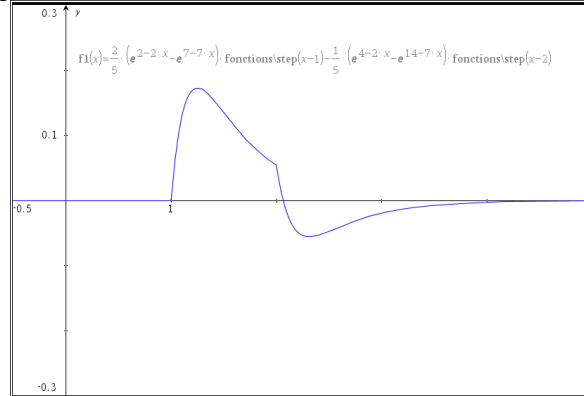
$$\text{pour le deuxième : } F_2(s) = \frac{1}{s^2+9s+14} = \frac{1}{5} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{5} \frac{1}{s+7}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-7t}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = f_1(t-1) \cdot u(t-1) - f_2(t-2) \cdot u(t-2)$$

$$y(t) = \frac{2}{5}(e^{-2t+2} - e^{-7t+7}) \cdot u(t-1) - \frac{1}{5}(e^{-2t+4} - e^{-7t+14}) \cdot u(t-2)$$

Voici le graphique, produit avec une calculatrice :



5. $(2x+3)y'' - 4xy' + 5y = 0$, avec $y(0) = 8$ et $y'(0) = 1$

- a) Il y a une singularité en $x = -\frac{3}{2}$, alors qu'on développera autour de 0 à cause des conditions initiales. Donc $R = \frac{3}{2}$

L'intervalle de convergence est $\left] -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right[$.

- b) On pose $y = \sum a_n x^n$, avec $a_0 = 8$ et $a_1 = 1$.

Alors $y' = \sum a_n n x^{n-1}$ et $y'' = \sum a_n n \cdot (n-1) x^{n-2}$.

On substitue dans l'équation différentielle :

$$2x \sum a_n n \cdot (n-1) x^{n-2} + 3 \sum a_n n \cdot (n-1) x^{n-2} - 4x \sum a_n n x^{n-1} + 5 \sum a_n x^n = 0$$

$$\sum 2a_n n \cdot (n-1) x^{n-1} + \sum 3a_n n \cdot (n-1) x^{n-2} - \sum 4a_n n x^n + \sum 5a_n x^n = 0$$

$$\sum 2a_{n+1} (n+1) \cdot n x^n + \sum 3a_{n+2} (n+2) \cdot (n+1) x^n - \sum 4a_n n x^n + \sum 5a_n x^n = 0$$

$$\sum (2a_{n+1} (n+1) \cdot n + 3a_{n+2} (n+2) \cdot (n+1) - 4a_n n + 5a_n) x^n = 0$$

Chaque coefficient doit être égal à 0, et on isole a_{n+2} :

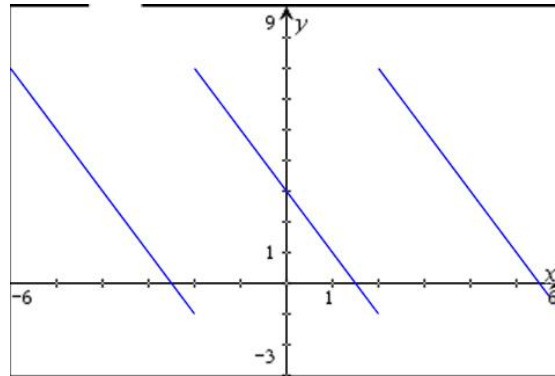
$$a_{n+2} = \frac{-(2a_{n+1} \cdot n \cdot (n+1) - a_n \cdot (4n-5))}{3 \cdot (n+1) \cdot (n+2)} ; \text{ c'est la formule de récurrence.}$$

- c) On a que $a_0 = 8$ et $a_1 = 1$ et on calcule que $a_2 = \frac{-20}{3}$, $a_3 = \frac{77}{54}$, $a_4 = \frac{-167}{162}$, ce qui nous donne 5 coefficients non nuls.

$$y = 8 + x - \frac{20}{3}x^2 + \frac{77}{54}x^3 - \frac{167}{162}x^4 + \dots$$

d) $1 \in]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$, donc on peut utiliser la série trouvée pour évaluer $y(1) \approx 2,7284$

6.a) Voici le graphe de $f(x)$, tracé avec une calculatrice :



b) Si on translate notre fonction de 3 unités vers le bas, elle devient impaire ; les a_n sont donc tous nuls. Il faut compter $\frac{a_0}{2}$ (qui sera égal à 3) et les b_n .

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (3-2x) dx = 3$$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 (3-2x) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{2} x\right) dx = \frac{8 \cdot (-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x) = 3 - \frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \frac{4}{\pi} \sin(\pi x) - \frac{8}{3\pi} \sin\left(3 \frac{\pi}{2} x\right) + \dots$$

c) On prend T_4 , qui est semblable à la nôtre si on la multiplie par -1 , pour inverser l'inclinaison, et qu'on la monte ensuite de 3 unités.

$$P_T = 2\pi, P_f = 4 ; A_T = 2\pi, A_f = 8.$$

Réflexion puis translation verticale de 3 unités vers le haut.

$$f(x) = 3 - \frac{8}{2\pi} T_4\left(\frac{2\pi}{4} x\right) = 3 - \frac{4}{\pi} T_4\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

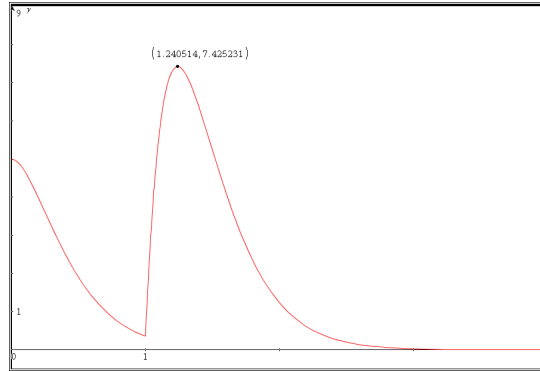
$$f(x) = 3 - \frac{4}{\pi} \cdot 2 \left(\frac{1}{1} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \frac{\pi}{2} x\right) + \dots \right)$$

$$= 3 - \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \frac{\pi}{2} x\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{\pi}{2} x\right) - \dots \right)$$

7.a) On résout l'équation différentielle $y'' + 8y' + 17y = 80\delta(t-1)$ avec la calculatrice (Laplace) et on obtient

$$y(t) = 80e^{-4t} \sin(t-1)u(t-1) + 5e^{-4t} \cos(t) + 20e^{-4t} \sin(t)$$

- b) On trace le graphe de $y(t)$ et on voit clairement que l'écart maximal se produit à $t = 1,24$; la masse se situe alors à $y = 7,425$:



- 8.a) On a $C = 10^{-3}$, $L = 15$, $R = 10$ et $V = 100 \sin(3t)$

$$15 \times 10^{-3} \frac{d^2 v_c}{dt^2} + 10 \times 10^{-3} \frac{dv_c}{dt} + v_c = 100 \sin(3t), \text{ avec } v_c(0) = 100 \text{ et } v_c'(0) = 0$$

$$v_c(t) = 104e^{-t/3} \cos(8.158t) - 38.21e^{-t/3} \sin(8.158t) - 4.005 \cos(3t) + 115.468 \sin(3t)$$

b) $v_{c_{PERM}}(t) = -4.005 \cos(3t) + 115.468 \sin(3t)$

Son amplitude est 115.537 volts.

c) $i(t) = 10^{-3} v_c'(t)$

$$i(t) = e^{-t/3} (-0.346 \cos(8.158t) - 0.836 \sin(8.158t)) + 0.346 \cos(3t) + 0.012 \sin(3t) \text{ A}$$