

Vous devez faire ce devoir **avec les équipes déjà formées (voir SIGNETS ou Moodle)**.

Vous remettrez une copie PDF par équipe, via Moodle, au plus tard à 9h00 AM, le 11 février 2026

Lisez bien les consignes dans l'onglet «Devoirs et tests» de votre site Moodle de cours.

Les graphes demandés doivent être **produits et imprimés (PDF) avec le logiciel Nspire**.

Résoudre manuellement une équation différentielle signifie utiliser les techniques vues dans ce cours, **sans utiliser la commande deSolve**. Vous pouvez évidemment, comme on l'a fait au cours, utiliser votre calculatrice Nspire pour effectuer différents calculs, incluant, entre autres, le calcul des dérivées et des intégrales, des simplifications algébriques, la résolution d'équations et de systèmes d'équations etc. **Vous devez indiquer quelles opérations sont faites avec la calculatrice** et les résultats obtenus.

Pour les problèmes d'applications physiques, vous devez toujours utiliser la commande deSolve pour obtenir directement la solution des équations différentielles. **Indiquez la syntaxe utilisée**.

1- (30 points) Un parachutiste saute d'un avion à une altitude de 1400 m. La masse du parachutiste, avec son équipement, est 100 kg. On supposera que l'air offre une résistance qui est proportionnelle à la vitesse du parachutiste, avec une constante de proportionnalité de $k_1 = 16$ kg/s pendant la chute libre. Après 20 secondes, le parachute est ouvert, et la constante de proportionnalité devient $k_2 = 160$ kg/s. On suppose que le parachute se déploie instantanément quand le parachutiste tire la corde. **Utilisez** $g = 9,81 m/s^2$.

Utilisez et dessinez un référentiel, pour lequel la position du parachutiste est la hauteur par rapport au sol. Donnez vos réponses en mode «approx», donc en point flottant, et non en mode «exact».

- Posez une équation différentielle représentant ce mouvement pendant la chute libre. Déterminez la vitesse et la position du parachutiste pendant cette première phase de son saut.
- À quelle vitesse notre homme tombe-t-il au moment où il tire la corde pour ouvrir son parachute? À quelle hauteur est-il rendu à ce moment-là?
- Posez de nouveau une équation différentielle pour la portion de la chute avec parachute ouvert. Déterminez la vitesse et la position du parachutiste pendant cette deuxième phase de son saut.
- À quelle vitesse arrive-t-il au sol, et combien de temps (depuis le début du saut) cela lui prend-il pour atteindre le sol?
- Fournissez 3 graphes et donnez les 3 fonctions donnant la position, la vitesse et l'accélération pour toute la chute. Vous devez fournir des fonctions définies par morceaux (avant et après l'ouverture du parachute).

Le premier donnera l'accélération pendant toute la durée de la chute.

Le deuxième donnera la vitesse, pendant toute la durée de la chute.

Enfin, le troisième donnera la hauteur du parachutiste pendant toute la durée de sa chute.

2- (25 points) On laisse tomber, du haut d'un édifice de 70 mètres (on est sur le bord du toit), un

objet ayant une masse de $\frac{1}{2}$ kg; la vitesse initiale est nulle. (**utilisez** $g = \frac{98}{10} m/s^2$).

On suppose une force de résistance de l'air qui vaut (en grandeur) $\frac{1}{10}$ fois le carré de la vitesse, donc $\frac{v^2}{10}$.

- Utilisez et dessinez un référentiel pour lequel **la position de l'objet correspond à la distance parcourue** depuis le début de la chute. Posez une équation différentielle représentant le mouvement de l'objet.

Note : travailler avec des entiers peut aider et simplifier le travail (d'où le 98/10 et non 9.8)

b) Résolvez cette équation pour trouver la distance parcourue et la vitesse de l'objet en fonction du temps.

Note : la vitesse sera nécessairement entre 0 et 7 m/s. **Justifiez ce fait avant même de résoudre** l'équation différentielle (trouvez la vitesse limite...). Utilisez ce fait pour vous aider à obtenir une solution explicite pour la vitesse.

c) Donnez la hauteur et la vitesse de l'objet après 4 secondes de mouvement.

d) Après combien de temps et à quelle vitesse l'objet touche-t-il le sol?

e) Fournissez 2 graphes. Le premier donnera la vitesse et le deuxième donnera **la hauteur de l'objet** pendant toute la durée de sa chute.

3- (20 points) On branche en série une résistance de 300Ω , un condensateur ayant une capacitance de $20 \mu\text{F}$ et avec une source de $20\sin(80t)$ volts. Initialement, à $t = 0$, la tension du condensateur est de 12 volts, donc $v_C(0) = 12$.

a) Posez l'équation différentielle de ce circuit et donnez sa solution, c'est-à-dire $v_C(t)$.

b) Fournissez un graphe de cette solution; ajustez la fenêtre pour bien voir cette solution.

c) Déterminez la tension maximale dans ce condensateur et l'instant où cela se produit.

d) Quelle est l'amplitude de la solution en régime permanent ? (**Solution non-graphique**)

e) Donnez le courant $i(t)$ circulant dans ce circuit avec son graphe.

4- (35 points) Résolvez **manuellement** les équations différentielles suivantes :

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 74x = 0$ avec $x(0) = 4$ et $x'(0) = -3$.

b) $4\frac{d^4y}{dt^4} - 4\frac{d^3y}{dt^3} + 25\frac{d^2y}{dt^2} - 24\frac{dy}{dt} + 6y = 0$.

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 14y = 5xe^{-3x} + 2$.

d) $y'' + 8y = 3\cos(5x) + x^2 - 1$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -5$.

5- (20 points) Un réservoir contient 600 litres d'eau salée, contenant initialement 10 kilogrammes de sel. On y déverse une solution contenant 400 grammes de sel par litre d'eau à un rythme de 8 litres par minute. Simultanément, le mélange s'échappe avec un débit de 10 litres par minute. **Le volume net d'eau diminue donc de 2 litres par minute.** (aide : voir pages 109-110 des notes de cours)

a) Posez et résolvez l'équation différentielle représentant cette situation. Fournissez un graphe de la quantité de sel dans le réservoir entre le moment initial ($t = 0$) et le moment où le réservoir est vide.

b) Déterminez (réponses arrondies à 3 décimales)

i) la quantité de sel présente après 3 heures.

ii) la quantité de sel présente quand le réservoir ne contient plus que 120 litres d'eau

iii) après combien de temps y aura-t-il 80 kg de sel dans le réservoir

c) Déterminez la quantité maximale de sel que le réservoir contiendra et à quel moment cela se produira (réponses arrondies à 3 décimales).

En c), vous pouvez utiliser le mode « Analyse graphique » de votre calculatrice avec le graphique obtenue en a) à condition que les valeurs et le point soient affichés sur le graphe que vous remettez avec votre devoir.