Vous devez faire ce devoir **avec les équipes déjà formées (voir SIGNETS ou Moodle)**.
Vous remettrez une copie PDF par équipe, via Moodle, au plus tard à 9h00 le 25 mars 2026

Les graphes demandés doivent être **produits et imprimés (PDF) avec le logiciel Nspire.**
Vous devez indiquer quelles opérations sont faites avec la calculatrice et les résultats obtenus.
Indiquez également les formules utilisées de la table des transformées de Laplace dans vos solutions.
**Sauf indication contraire**, les commandes et fonctions du package ETS_specfunc ne peuvent être utilisées pour résoudre les problèmes du devoir (rien ne vous empêche de vérifier vos réponses avec celles-ci).

**1-** (40 points) Trouvez les transformées de Laplace des fonctions suivantes à l'aide de votre table de transformées :

**a)** $f(t)=\left(3t^2-1\right)^2$ **b)** $g(t)=2t^3\cos(3t)-4t^2$ **c)** $h(t)=4\cos^2(5t)$

**d)** $k(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t^2 & \text{si } 0\le t<2 \\ 4 & \text{si } 2\le t<5 \\ 2t-6 & \text{si } t\ge 5 \end{cases}$

**i-** écrivez d'abord la fonction $k(t)$ en une seule expression à l'aide de fonctions échelon-unité

**ii-** tracez le graphe de $k(t)$ pour $t$ allant de -1 à 10

**iii-** puis trouvez la transformée de Laplace de $k(t)$ à l'aide des propriétés de votre table de transformées de Laplace.

**2-** (40 points) Trouvez, à l'aide de votre table, les transformées de Laplace inverses de :

**a)** $F(s)=\dfrac{-3s^3-52s^2-244s-250}{s^4+14s^3+78s^2+176s+136}$ **b)** $G(s)=\dfrac{8s^2+7s+96}{21s^3-14s^2+147s-98}$

**c)** $H(s)=\dfrac{4s}{\left(s^2+10\right)^2}-5\left(1-\dfrac{2}{s}\right)e^{-4s}$

**3-** (20 points) Soit l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+7y=-20\delta(t-2\pi) \qquad y(0)=2,\ \ y'(0)=-3$$

**a)** Résolvez à l'aide des transformées de Laplace cette équation.

**b)** Fournissez le graphe de la solution pour $t$ allant de 0 à $5\pi$ .

**c)** Quelle est l'amplitude (arrondie à 5 décimales) de $y(t)$ lorsque $t>2\pi$ ?
Expliquez et justifiez d'où vient votre réponse.

VOIR SUITE AU VERSO

**4-** (15 points) Résolvez le système d'équations différentielles suivant à l'aide de transformées de Laplace:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}+2x=2t-4\frac{dy}{dt}\\&\frac{dy}{dt}-3y-\frac{dx}{dt}=2x\end{aligned}\qquad \text{avec}\quad x(0)=2 \qquad y(0)=-1$$

**5-** (65 points) On suspend une masse de $\frac{1}{2}$ kg à un ressort qui a une constante de rappel de 20 N/m. Supposons une force d'amortissement valant 2 fois la vitesse. Utilisez le même référentiel que celui donné dans les notes de cours. On descend l'objet 25 cm sous le point d'équilibre, puis on lui donne une vitesse initiale de $6\ {}^{m}/_{s}$ vers le haut. Ces conditions initiales sont les mêmes pour chaque sous-question qui suit.
Dans tout ce numéro, **vous devez utiliser la commande « solved( ) » du programme ETS_specfunc** pour résoudre les équations différentielles. Indiquez la syntaxe utilisée. Les graphes demandés doivent tous avoir $t=x=-1$ comme borne de gauche sur l'axe horizontal de façon à bien voir l'axe vertical. Ajustez en hauteur et en largeur les dimensions de la fenêtre graphique pour bien voir le comportement de la masse qui oscille.

**a)** Posez et résolvez l'équation différentielle qui correspond à ce mouvement; déterminez la position $y(t)$ de l'objet en fonction du temps. Fournissez le graphe de $y(t)$ pour bien faire ressortir le mouvement de la masse.

**b)** Obtient-on un mouvement sur-amorti ou un mouvement sous-amorti? Où est l'objet après 1 seconde, donnez également sa vitesse et sa direction. Quel est l'écart maximum par rapport au point d'équilibre, à quel moment cela se produit-il?

**c)** Quelle devrait être la valeur du coefficient d'amortissement pour que le résultat soit un amortissement critique?

**d)** Considérons maintenant qu'on applique une force constante de 10 Newton pendant les 8 premières secondes seulement du mouvement. Posez et résolvez l'équation du mouvement; fournissez un graphe de la solution. Décrivez le mouvement résultant, avant et après $t=8$ secondes.

**e)** Considérons maintenant qu'on applique plutôt une force de $f(t)=12\sin(4t)$. Posez et résolvez la nouvelle équation. Donnez le régime permanent et son amplitude (solution non graphique). Fournissez un graphe de la solution et ajoutez la courbe du régime permanent au graphe de la solution. Quel est dans ce cas l'écart maximum par rapport au point d'équilibre, à quel moment cela se produit-il?

**f)** Pour une raison technique, la force indiquée en e) tombe en panne quand $t$ est entre $\pi$ et $2\pi$ secondes.
Donc la force qu'on avait en e) devient $f(t)=\begin{cases}12\sin(4t) & 0\le t<\pi \text{ et } t\ge 2\pi\\ 0 & \pi\le t<2\pi\end{cases}$

i) Posez une nouvelle équation en utilisant des fonctions échelon-unité pour tenir compte de cette contrainte (la nouvelle force telle qu'indiquée ci-haut).

ii) Résolvez cette nouvelle équation différentielle; fournissez la solution obtenue avec le logiciel Nspire (imprimez votre feuille de calcul) et fournissez un graphe montrant bien toutes les étapes du mouvement.

iii) Quel sera le régime permanent dans cette situation?

**g)** Utilisez $9{,}81\,m/s^2$ pour déterminer de combien le ressort s'est étiré lorsqu'on a suspendu l'objet initialement.