AVERTISSEMENT: cet examen vous est fourni à titre d'exemple. Il est possible que certains sujets traités ici ne le soient pas dans l'examen que vous aurez. À l'inverse, certains sujets non traités ici pourraient se retrouver dans votre examen. Celui que vous aurez pourra être plus court ou plus long, plus facile ou plus difficile.

NOTES :
- répondez dans le cahier d'examen, sauf pour le numéro 8 où vous répondez sur le questionnaire.
- vous devez donner des solutions détaillées pour chaque exercice. Indiquez les opérations faites avec la calculatrice.
- documentation permise : calculatrice TI-Nspire et 3 feuilles 8 1/2 par 11 recto-verso aide-mémoire.
- résoudre **manuellement** une équation différentielle signifie résoudre avec les techniques mentionnées ou vues en classe, sans utiliser la commande DeSolve( ); vous pouvez évidemment utiliser votre calculatrice pour effectuer des dérivées et intégrales, pour résoudre des équations ou des systèmes d'équations etc. (comme on l'a fait en classe).

1-(10) Soit l'équation différentielle $x^2y''+7xy'+5y=0$

a) Vérifiez, **sans la résoudre** et en donnant les détails de vos calculs, que $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^5}$ est la solution générale de cette équation (la TI ne peut être utiliser que pour le calcul de y' et y'').

b) Trouvez la solution particulière satisfaisant les conditions initiales suivantes :

$y(1)=0$ et $y'(1)=-8$

(Indiquez le système d'équations à résoudre pour trouver les valeurs de C_1 et C_2)

2-(10) Résolvez **manuellement** par la méthode de variation des paramètres l'équation suivante

$$\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+16y=\frac{2e^{-4x}}{x}$$

3-(12) Pour les équations suivantes, donnez la solution complémentaire et le bon candidat à utiliser pour trouver la solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés. Ne pas résoudre ou déterminer les coefficients!

a) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+6\dfrac{d^2y}{dx^2}+8\dfrac{dy}{dx}=3xe^{-4x}-2e^{-x}-x^2+1$

b) $\dfrac{d^3x}{dt^3}+3\dfrac{d^2x}{dt^2}-54x=5\sin(3t)-2e^{3t}+3te^{-3t}$

4-(20) Résolvez **manuellement** les équations suivantes :

a) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3y}{x}+\dfrac{y^2+4x^2}{x^2}$ (je veux une solution explicite)

b) $\dfrac{dy}{dx}-2y=4xy^3$ avec $y(0)=1$ (solution sous une forme simplifiée, sans parenthèses)

5-(10) Résolvez **manuellement** par la méthode des coefficients indéterminés :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=4x-2e^{-2x}+5e^{2x}$$

Pour les numéros 6 et 7, **vous devez utiliser** la commande DeSolve( ) de votre calculatrice pour résoudre les équations différentielles obtenues.

6-(15) Un parachutiste ayant une masse (avec son équipement) de 100 kg effectue un saut et ouvre son parachute à 800 m d'altitude, alors qu'il descend à une vitesse de 50 m/s. On considère avec ce type de parachute une force d'amortissement valant 140 fois la vitesse.

a) Posez les équations différentielles nécessaires et résolvez-les pour déterminer la vitesse et la position de ce parachutiste en fonction du temps (**utilisez** $g = 9{,}8 m/s^2$). Vous devez **<u>clairement indiquer le référentiel choisi</u>**.

b) Après combien de temps arrive-t-il au sol? Quelle est la vitesse limite pendant sa chute?

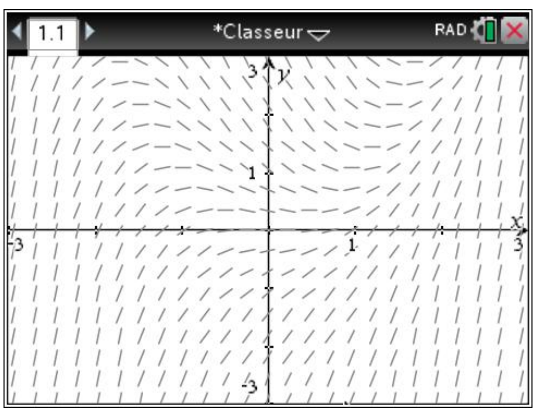
c) Il recommence le même saut avec les mêmes conditions (même altitude à l'ouverture, même vitesse initiale) sauf qu'il a un nouveau type de parachute. Il constate en descendant une vitesse limite de 6 m/s. Combien vaut la force d'amortissement (au lieu de 140 fois la vitesse) pour donner cette vitesse limite?

7-(8) Un circuit électrique est formé d'une résistance, R = 5 kΩ, branchée en série avec un condensateur de C = 50 μF et une source V = $10e^{-4t} - 2e^{-8t}$ volts. On suppose que $v_c(0) = 0$

a) Posez l'équation différentielle de ce circuit et résolvez-la pour déterminer le voltage aux bornes du condensateur en fonction du temps. Quel sera ce voltage après 1 seconde?

b) Quel sera le voltage maximum atteint aux bornes du condensateur? Après combien de temps ce maximum est-il atteint?

8-(8) Considérons le champ de pentes suivant; **<u>pour ce numéro, répondez sur le questionnaire</u>**.



(avec paramètre « Champ résolution » =25)

a) Laquelle des 3 équations d'ordre 1 suivante correspond à ce champ de pentes? (encerclez-la)

i) $\dfrac{dy}{dx} = (x-y)^2$ OU ii) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ OU iii) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y$

b) Tracez sur le champ de pentes, la solution particulière qui correspond à la condition initiale $y(0) = -1$. (utilisez la méthode d'Euler et une valeur de 0,1 pour le pas de tracé). Estimez $y(1)$ avec cette solution numérique: $y(1) =$_______________

9-(7) Résolvez **manuellement** l'équation suivante. Je veux une solution explicite.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3y - 4x^3}{1 - x^4} \qquad \text{avec} \quad y(0) = 3$$