1- Vérification de la solution de $x^2y''+7xy'+5y=0$

a) Si $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^5}$ alors $y'=\dfrac{-C_1}{x^2}-\dfrac{5C_2}{x^6}$ et $y''=\dfrac{2C_1}{x^3}+\dfrac{30C_2}{x^7}$

En substituant dans l'équation différentielle on trouve

$$x^2\left(\frac{2C_1}{x^3}+\frac{30C_2}{x^7}\right)+7x\left(\frac{-C_1}{x^2}-\frac{5C_2}{x^6}\right)+5\left(\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^5}\right)\overset{?}{=}0$$

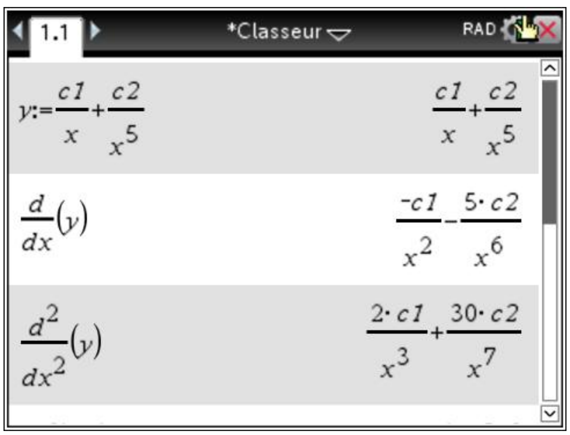
$$=2\frac{C_1}{x}+30\frac{C_2}{x^5}-7\frac{C_1}{x}-35\frac{C_2}{x^5}+5\frac{C_1}{x}+5\frac{C_2}{x^5}=(2-7+5)\frac{C_1}{x}+(30-35+5)\frac{C_2}{x^5}=0$$

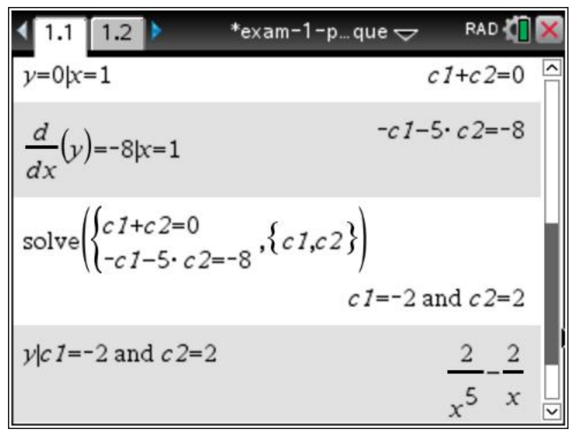
Donc oui c'est une solution et c'est la solution générale car il y a 2 constantes arbitraires essentielles.

b) Si $y(1)=0 \quad\Rightarrow\quad C_1+C_2=0$ et $y'(1)=-8 \quad\Rightarrow\quad -C_1-5C_2=-8$

En résolvant ce système, on trouve $C_1=-2$ et $C_2=2$.

La solution particulière est $\boxed{y=\dfrac{-2}{x}+\dfrac{2}{x^5}}$





2- Méthode de variation des paramètres.

En notation d'opérateurs, l'équation homogène est $\left(D^2+8D+16\right)y=0$

-4 est une racine double de l'équation caractéristique, donc la solution homogène est

$y_h=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}$

Pour appliquer la méthode, posons $y_p=L_1e^{-4x}+L_2xe^{-4x}$

On doit résoudre le système $\begin{cases} L_1'e^{-4x}+L_2'xe^{-4x}=0 \\ -4L_1'e^{-4x}+(1-4x)L_2'e^{-4x}=\dfrac{2e^{-4x}}{x}\end{cases}$

En résolvant celui-ci, on trouve $L_1'=-2$ et $L_2'=\dfrac{2}{x} \Rightarrow L_1=\int -2dx=-2x$ et $L_2=\int\dfrac{2}{x}dx=2\ln(x)$

En substituant dans $y_p=L_1e^{-4x}+L_2xe^{-4x}$, on obtient $y_p=-2xe^{-4x}+2x\ln(x)e^{-4x}$

La solution générale est $\boxed{y=y_h+y_p=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}-2xe^{-4x}+2x\ln(x)e^{-4x}}$

En combinant les 2[e] et 3[e] termes, on peut aussi écrire la solution générale sous cette forme :

$$y=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}+2x\ln(x)e^{-4x}$$

cSolve$(d^2+8\cdot d+16=0,d)$	$d=^-4$
$yp=m1\cdot e^{-4\cdot x}+m2\cdot x\cdot e^{-4\cdot x}$	$yp=(m2\cdot x+m1)\cdot e^{-4\cdot x}$
$\frac{d}{dx}\left(x\cdot e^{-4\cdot x}\right)$	$(1-4\cdot x)\cdot e^{-4\cdot x}$
solve$\left(\begin{cases} m1p\cdot e^{-4\cdot x}+m2p\cdot x\cdot e^{-4\cdot x}=0 \\ -4\cdot m1p\cdot e^{-4\cdot x}+m2p\cdot(1-4\cdot x)\cdot e^{-4\cdot x}=\frac{2\cdot e^{-4\cdot x}}{x}\end{cases},\{m1p,m\right.$	
	$x\neq 0$ and $m1p=^-2$ and $m2p=\frac{2}{x}$

3- a) En notation opérateur, on a $\left(D^3+6D^2+8D\right)y=3xe^{-4x}-2e^{-x}-x^2+1$

Pour la solution homogène, les zéros de D^3+6D^2+8D sont $0,-2$ et -4

Donc $\boxed{y_h=C_1+C_2\,e^{-2x}+C_3\,e^{-4x}}$

Pour la solution particulière, en considérant uniquement les fonctions à droite de l'équation on a

candidat normal : $y_p=Axe^{-4x}+Be^{-4x}+Ce^{-x}+Dx^2+Ex+F$

Comme des termes de y_p apparaissent aussi dans y_h , on doit corriger le candidat en multipliant les 2 premiers termes par *x* pour éliminer le chevauchement. On fait la même chose avec les 3 derniers termes.

candidat modifié : $\boxed{y_p=Ax^2e^{-4x}+Bxe^{-4x}+Ce^{-x}+Dx^3+Ex^2+Fx}$

b) En notation opérateur, on a $\left(D^3+3D^2-54\right)x=5\sin(3t)-2e^{3t}+3te^{-3t}$

Pour la solution homogène, les zéros de D^3+3D^2-54 sont $-3\pm 3i$ et 3

Donc $\boxed{x_h=e^{-3t}\left(C_1\sin(3t)+C_2\cos(3t)\right)+C_3\,e^{3t}}$

Pour la solution particulière, en considérant uniquement les fonctions à droite de l'équation on a

candidat normal : $x_p=A\sin(3t)+B\cos(3t)+Ce^{3t}+Dte^{-3t}+Ee^{-3t}$

Comme le 3e terme de y_p apparait aussi dans y_h , on doit corriger le candidat en multipliant ce terme par t pour éliminer le chevauchement.

candidat modifié : $\boxed{x_p=A\sin(3t)+B\cos(3t)+Cte^{3t}+Dte^{-3t}+Ee^{-3t}}$

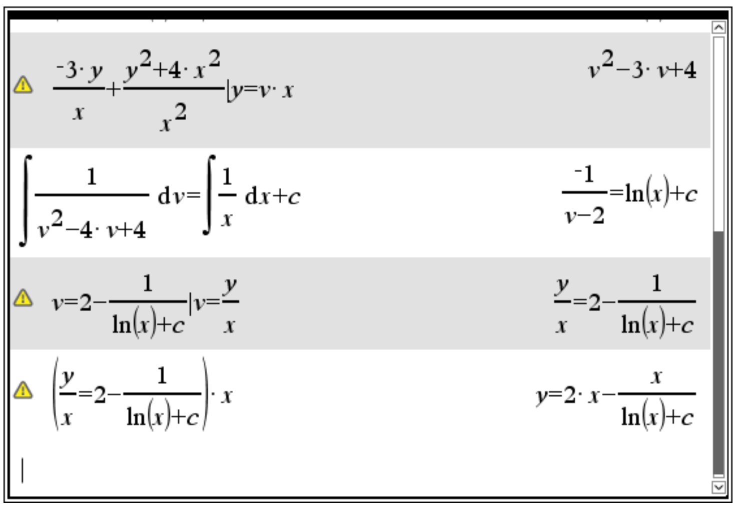
4- a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3y}{x} + \dfrac{y^2+4x^2}{x^2}$, en simplifiant on a $\dfrac{dy}{dx} = -3\left(\dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 4 = F\left(y/x\right)$

L'équation est homogène. Posons $\boxed{v = \dfrac{y}{x}}$ et on a $F(v) = v^2 - 3v + 4$

Avec ce changement de variables, l'équation homogène devient $\dfrac{1}{F(v)-v}dv = \dfrac{1}{x}dx$

En intégrant on aura $\displaystyle\int \frac{1}{v^2-4v+4}dv = \int \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{v-2} = \ln(x) + C \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{\ln(x)+C} = v-2$

Donc $v = \dfrac{y}{x} = 2 - \dfrac{1}{\ln(x)+C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2x - \dfrac{x}{\ln(x)+C}}$



b) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 4xy^3$ avec $y(0) = 1$

C'est une équation de Bernoulli avec $n = 3 \quad P(x) = -2 \quad Q(x) = 4x$

Posons $v = y^{1-n} \Rightarrow \quad v = y^{1-3} = y^{-2}$

L'équation devient $\dfrac{dv}{dx} + (-2)(-2)v = 4x\cdot(-2) \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} + 4v = -8x$

Cette dernière équation est linéaire avec $P(x) = 4 \quad Q(x) = -8x$

le facteur intégrant est $u = e^{\int 4dx} = e^{4x}$

$\Rightarrow v\cdot e^{4x} = \int -8xe^{4x}dx + C$ ce qui donne $\Rightarrow v\cdot e^{4x} = -\left(\dfrac{4x-1}{2}\right)e^{4x} + C$

En remplaçant v par sa valeur et en multipliant l'équation par e^{-4x} on obtient

$$v = y^{-2} = -\left(\frac{4x-1}{2}\right) + Ce^{-4x} \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2} = -2x + \frac{1}{2} + Ce^{-4x}$$

En considérant $y(0)=1 \Rightarrow \quad \frac{1}{1} = \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$

La solution cherchée est $\boxed{\frac{1}{y^2} = -2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4x}}$

5- Méthode des coefficients indéterminés

En notation opérateur on a $\left(D^2+4D+4\right)y = 4x - 2e^{-2x} + 5e^{2x}$

1- Pour l'équation homogène associée, $\left(D^2+4D+4\right)y = 0$, -2 est une racine double

Donc la solution homogène est $\boxed{y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}$

2- Pour la solution particulière, en tenant compte des termes $4x - 2e^{-2x} + 5e^{2x}$, le candidat normal est

$y_p = Ax + B + Ce^{-2x} + De^{2x}$. Le 3e terme est problématique car il est aussi présent dans y_h . On doit donc multiplier ce terme par x^2 pour éliminer cette double occurrence. Le candidat modifié à utiliser sera alors $y_p = Ax + B + Cx^2e^{-2x} + De^{2x}$

En le substituant dans l'équation originale on obtient

$$16De^{2x} + 2Ce^{-2x} + 4Ax + (4A+4B) = 4x - 2e^{-2x} + 5e^{2x}$$

On en déduit que $16D = 5 \quad 2C = -2 \quad 4A = 4$ et $4A + 4B = 0$

En résolvant ce système d'équations on trouve $D = \frac{5}{16} \quad C = -1 \quad A = 1 \quad B = -1$

La solution particulière est donc $\boxed{y_p = x - 1 - x^2e^{-2x} + \frac{5}{16}e^{2x}}$

La solution générale est $\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x - 1 - x^2 e^{-2x} + \frac{5}{16}e^{2x}}$

$y:=a\cdot x+b+c\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x}+d\cdot e^{2\cdot x} \qquad d\cdot e^{2\cdot x}+c\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x}+a\cdot x+b$

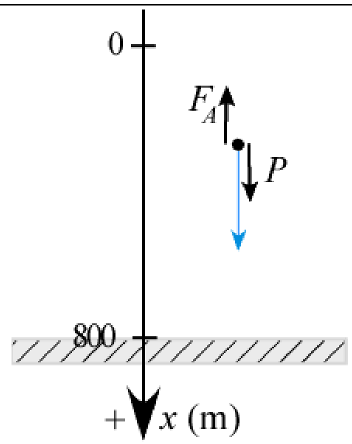
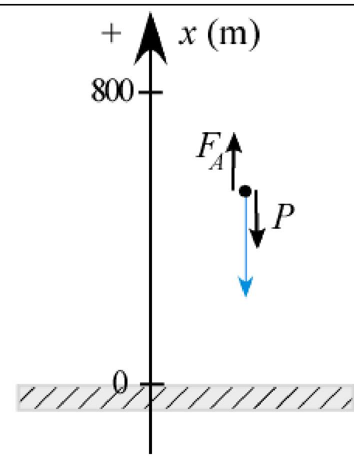
$\frac{d^2}{dx^2}(y)+4\cdot\frac{d}{dx}(y)+4\cdot y$

$2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot\left(8\cdot d\cdot e^{4\cdot x}+2\cdot(a\cdot x+a+b)\cdot e^{2\cdot x}+c\right)$

$\mathrm{propFrac}\left(2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot\left(8\cdot d\cdot e^{4\cdot x}+2\cdot(a\cdot x+a+b)\cdot e^{2\cdot x}+c\right)\right)$

$16\cdot d\cdot e^{2\cdot x}+2\cdot c\cdot e^{-2\cdot x}+4\cdot a\cdot x+4\cdot a+4\cdot b$

6- On connait ces valeurs : $m = 100$ kg , $h_0 = 800$ m , $v_0 = 50$ m/s et $F_a = 140v$. Le signe associé à la vitesse et aux forces dépend du référentiel choisi. De même, la hauteur initiale est bien de 800 m si on pose le zéro du référentiel au sol. On a ici 2 choix principaux comme référentiel :

<table>
<tr>
<td>
x: distance parcourue</td>
<td>
x: hauteur par rapport au sol</td>
</tr>
<tr>
<td>Dans ce cas, x est la distance parcourue après l'ouverture du parachute. La vitesse est positive pendant le mouvement. La force « poids » est aussi positive. On a donc $x(0)=0$ et $v(0)=50$

L'équation est :

$100\dfrac{dv}{dt} = 100 \cdot 9{,}8 - 140v$

deSolve(100v′=980-140v and v(0)=50,t,v)

$\Rightarrow \boxed{v(t) = 43e^{-7t/5} + 7} = 43(0{,}246597)^t + 7$

deSolve(100x′′=980-140x′ and x(0)=0 and x′(0)=50,t,x)

$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\dfrac{215}{7}e^{-7t/5} + 7t + \dfrac{215}{7}}$ ou

$\Rightarrow x(t) = -30{,}7143(0{,}246597)^t + 7t + 30{,}7143$</td>
<td>Dans ce cas, x est la hauteur du parachutiste après l'ouverture du parachute. La vitesse est négative pendant le mouvement. La force « poids » est aussi négative. On a donc $x(0)=800$ et $v(0)=-50$

L'équation est :

$100\dfrac{dv}{dt} = -100 \cdot 9{,}8 - 140v$

deSolve(100v′=-980-140v and v(0)=-50,t,v)

$\Rightarrow \boxed{v(t) = -43e^{-7t/5} - 7} = -43(0{,}246597)^t - 7$

deSolve(100x′′=-980-140x′ and x(0)=800 and x′(0)=-50,t,x)

$\Rightarrow \boxed{x(t) = \dfrac{215}{7}e^{-7t/5} - 7t + \dfrac{5385}{7}}$ ou

$\Rightarrow x(t) = 30{,}7143(0{,}246597)^t - 7t + 769{,}286$</td>
</tr>
</table>

b) Pour le reste du problème, on utilisera le référentiel de gauche.

Si on résoud $x(t) = 800$ avec la TI-Nspire on trouve un temps de 109,898 sec pour arriver au sol.

Pour la vitesse limite théorique, on remarque que le terme en exponentielle dans la vitesse tend rapidement vers 0, d'où une vitesse limite théorique de 7 m/s. Et cette vitesse est atteinte rapidement, déjà après 20 secondes on est à 7 m/s. On peut aussi calculer *x*(109,798) pour confirmer cette valeur.

c) Posons une force d'amortissement valant en grandeur $F_a = k\,v$ et trouvons la valeur de *k*.

On remarquera que lorsqu'on a une chute libre et que la vitesse constante est atteinte, l'accélération est alors nulle. Dans l'équation du mouvement, $100\frac{dv}{dt} = 100 \cdot 9{,}8 - k\,v$, en posant la dérivée de la vitesse à 0 on obtiens $0 = 100 \cdot 9{,}8 - k\,v_L$ où v_L désigne la vitesse limite. En remplaçant ce terme par 6 m/s et en résolvant, on trouve $\boxed{k = \frac{490}{3} = 163{,}333}$. Donc une force d'amortissement de 163,333*v*.

On aurait pu aussi résoudre avec la commande **deSolve** l'équation $100\frac{dv}{dt} = 100 \cdot 9{,}8 - k\,v$. On aurait alors la solution

$v(t) = \left(50 - \frac{980}{k}\right)e^{-kt/100} + \frac{980}{k}$. Comme le terme en exponentiel tend vers 0, la vitesse limite sera de $v_L = \frac{980}{k}$ ce qui nous donnera la même réponse que précédemment.

$$\text{deSolve}(100\cdot v'=100\cdot 9.8-140\cdot v \text{ and } v(0)=50,t,v)$$
$$v=43.\cdot(0.246597)^t+7.$$
$$\text{deSolve}(100\cdot x''=980-140\cdot x' \text{ and } x(0)=0 \text{ and } x'(0)=50,t,x)$$
$$x=\frac{-215\cdot e^{\frac{-7\cdot t}{5}}}{7}+7\cdot t+\frac{215}{7}$$
$$\text{deSolve}(100\cdot v'=980-k\cdot v \text{ and } v(0)=50,t,v)$$
$$v=\left(50-\frac{980}{k}\right)\cdot e^{\frac{-k\cdot t}{100}}+\frac{980}{k}$$

7- Voici les valeurs connues : $R = 5\,k\Omega$, $C = 50\,\mu F$ et $V = 10e^{-4t} - 2e^{-8t}$. La condition initiale est $v_C(0) = 0$

a) $RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = V \Rightarrow 5\cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 10e^{-4t} - 2e^{-8t}$ ou $\frac{1}{4}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 10e^{-4t} - 2e^{-8t}$

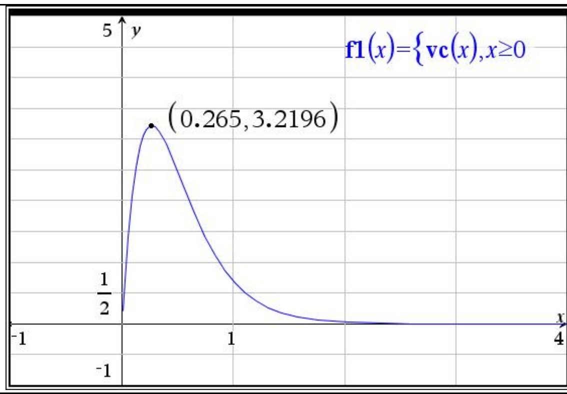
$$\text{deSolve}\left(\frac{1}{4}\cdot vc'+vc=10\cdot e^{-4\cdot t}-2\cdot e^{-8\cdot t} \text{ and } vc(0)=0,t,vc\right)$$
$$vc=2\cdot e^{-8\cdot t}\cdot\left((20\cdot t-1)\cdot e^{4\cdot t}+1\right)$$
$$\text{propFrac}\left(vc=2\cdot e^{-8\cdot t}\cdot\left((20\cdot t-1)\cdot e^{4\cdot t}+1\right)\right)$$
$$vc=(40\cdot t-2)\cdot e^{-4\cdot t}+2\cdot e^{-8\cdot t}$$
$$vc=(40\cdot t-2)\cdot e^{-4\cdot t}+2\cdot e^{-8\cdot t}|t=1 \qquad vc=38\cdot e^{-4}+2\cdot e^{-8}$$
$$vc=(40\cdot t-2)\cdot e^{-4\cdot t}+2\cdot e^{-8\cdot t}|t=1 \qquad vc=0.696665$$

La tension aux bornes du condensateur sera $\boxed{v_C(t) = (40t-2)e^{-4t} + 2e^{-8t}}$.

Après 1 seconde, on trouve $\boxed{v_C(1) = 0{,}69667 \text{ volts}}$.

b) Pour trouver le voltage maximum aux bornes du condensateur, on peut utiliser le mode graphique de votre calculatrice, en traçant la solution trouvée avec des valeurs adéquates pour les axes. On utilise ensuite la commande « valeur maximum » du sous-menu « Analyse graphique ».

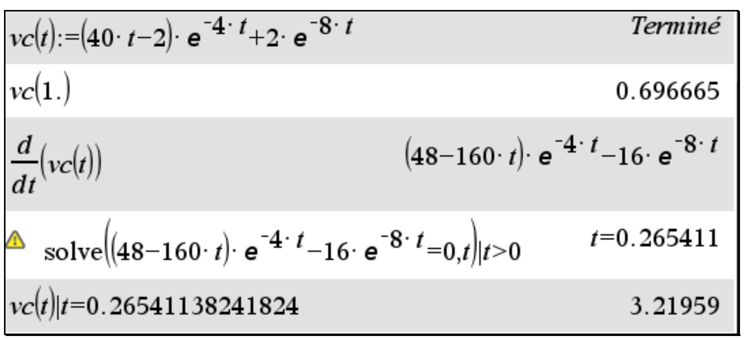
On trouve ainsi un maximum de 3.2196 volts après 0,265 secondes.



On remarque que la source alimentant le circuit tend vers 0 volts (vue la présence des 2 termes avec exponentielle négative). Assez rapidement donc le condensateur se videra et $v_C(t) \to 0$.

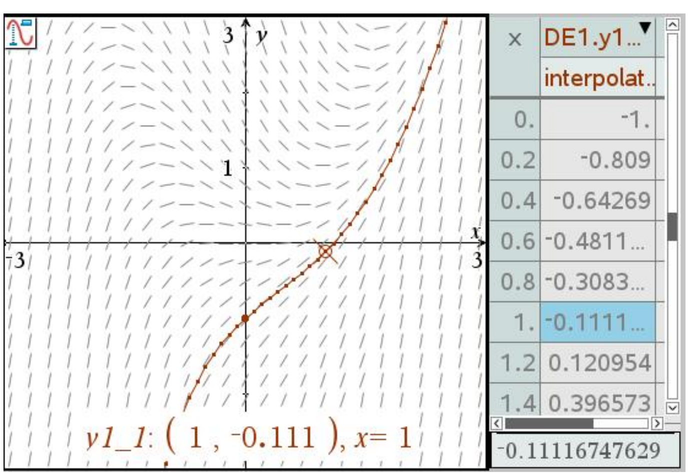
Le maximum observé sur le graphe est bien le maximum absolu si $t \geq 0$.

On peut également se servir du calcul différentiel en trouvant le zéro de la dérivée première de la solution trouvé (en ne considérant que les valeurs de *t* positive). On obtient évidemment la même réponse.



On constate que $v_C(0) = 0$ et que $v_C(t) \to 0$ lorsque *t* augmente. De plus, on remarque des valeurs positives observées (par exemple, $v_C(1) > 0$). On peut conclure que le seul point critique trouvé en $t = 0{,}265411$ doit correspondre à un maximum local et absolu.

8- La bonne équation est la 3e , $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y}$. L'estimé est $\boxed{y(1) \approx -0{,}1111}$.



9- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3y - 4x^3}{1-x^4}$ avec $y(0)=3$. On veut une solution explicite.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4x^3(y-1)}{1-x^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y-1}dy = \frac{4x^3}{1-x^4}dx$$

En intégrant, $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y-1}dy = \int \frac{4x^3}{1-x^4}dx \quad \Rightarrow \quad \ln(y-1) = C - \ln(x^4-1)$

Comme on veut une solution explicite, isolons *y* en prenant l'exponentielle de chaque côté du signe égal

$$\Rightarrow \quad e^{\ln(y-1)} = e^{C-\ln(x^4-1)} \quad \Rightarrow \quad y-1 = e^C \cdot e^{\ln(x^4-1)^{-1}} \quad \Rightarrow \quad y-1 = \frac{K}{x^4-1}$$

La solution générale est $\boxed{y = 1 + \dfrac{K}{x^4-1}}$. En appliquant la condition initiale $y(0)=3$, on trouve

$3 = 1 + \dfrac{K}{-1} \quad \Rightarrow \quad K = -2$. La solution finale est $\boxed{y = 1 - \dfrac{2}{x^4-1}}$ ou $y = \dfrac{x^4-3}{x^4-1}$ en prenant un dénominateur commun avec les termes de droite.

$\displaystyle\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int \frac{4\cdot x^3}{1-x^4}\,dx + c$	$\ln(y-1) = c - \ln(x^4-1)$
$e^{\ln(y-1) = c - \ln(x^4-1)}$	$y-1 = \dfrac{e^c}{x^4-1}$
$\left(y-1 = \dfrac{k}{x^4-1}\right)+1$	$y = \dfrac{k}{x^4-1}+1$
$\text{solve}\left(y = \dfrac{k}{x^4-1}+1, k\right)\vert x=0 \text{ and } y=3$	$k=-2$
$y = \dfrac{k}{x^4-1}+1 \vert k=-2$	$y = 1 - \dfrac{2}{x^4-1}$
$\text{comDenom}\left(y = 1 - \dfrac{2}{x^4-1}\right)$	$y = \dfrac{x^4-3}{x^4-1}$