Chapitre 2

Section 2.1 : forme séparable, variation de température

2.1- À chaque fois, on isolera la dérivée et on verra si on peut factoriser; si la factorisation en deux fonctions qui dépendent des « bonnes variables » est possible, alors l'équation sera séparable.

a) $\dfrac{2x^2}{xt^2-4x} = 2x \cdot \dfrac{1}{t^2-4}$, OUI variables séparables.

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2-y^2}{x\,y}$ ne se factorise pas : NON

c) $\ln(x+y)$ ne se factorise pas : NON

d) $\ln(2x\,y) = \ln(2x) + \ln(y)$ ne se factorise pas : NON

e) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2-t^2}{x-t} = \dfrac{(x-t)(x+t)}{x-t} = x+t$ ne se factorise pas : NON

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-2x}{y}$ ne se factorise pas : NON

2.2-a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x}$; alors $\dfrac{1}{y}dy = \dfrac{-1}{x}dx$

Les variables sont séparées; on intègre :

$\ln(y) = -\ln(x) + c \quad \Rightarrow \quad e^{\ln(y)} = e^{-\ln(x)+c} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{C}{x}$

Si $x=1$, alors $y=4$. Donc $4 = \dfrac{C}{1} \quad \Rightarrow \quad C=4 \quad \Rightarrow \quad x\,y = 4$

b) $2t\,dx + e^{-3x}\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^{3x}dx + \dfrac{1}{t}dt = 0$

Les variables sont séparées; on intègre :

$\dfrac{2}{3}e^{3x} + \ln(t) = c \quad \Rightarrow \quad 2e^{3x} + 3\ln(t) = C$

c) $\dfrac{dy}{dx} = y(8x+3) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{y}dy = (8x+3)dx$

Les variables sont séparées; on intègre :

$\ln(y) = 4x^2 + 3x + c$

On prend l'exponentielle : $y = C\,e^{4x^2+3x}$

d) $2x\cdot(y^2+1)dx + y\cdot(x^2+4)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2x}{x^2+4}dx + \dfrac{y}{y^2+1}dy = 0$

Les variables sont séparées; on intègre :

$\ln(x^2+4) + \dfrac{1}{2}\ln(y^2+1) = c \quad \Rightarrow \quad \ln(x^2+4) + \ln(y^2+1)^{1/2} = c$

On prend l'exponentielle : $(x^2+4)\sqrt{y^2+1} = C$

e) $\dfrac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$; alors $\dfrac{1}{e^y}dy = e^x dx$

Les variables sont séparées; on intègre :

$-e^{-y} = e^x - C \quad \Rightarrow \quad e^x + e^{-y} = C$

f) $\dfrac{dx}{dt} = x\dfrac{\cos(t)}{1-\sin(t)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x}dx = \dfrac{\cos(t)}{1-\sin(t)}dt$

Les variables sont séparées; on intègre :

$\ln(x) = -\ln(1-\sin(t)) + c \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{C}{1-\sin(t)}$ en prenant l'exponentielle.

Remarquez que la constante ici et celle dans le manuel ont des signes différents.

g) $L\dfrac{di}{dt} + R\,i = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{i}di + \dfrac{R}{L}dt = 0$

Les variables sont séparées; on intègre :

$\ln(i) + \dfrac{Rt}{L} = c \quad \Rightarrow \quad \ln(i) = c - \dfrac{Rt}{L} \quad \Rightarrow \quad i = e^{c - Rt/L}$

$i = C\,e^{-Rt/L}$

h) $y' = \dfrac{4-y^2}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{4-y^2}dy = \dfrac{1}{x}dx$

Les variables sont séparées; on intègre :

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{y+2}{y-2}\right)=\ln(x)+c \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{y+2}{y-2}\right)=\ln\left(x^4\right)+4c \quad\Rightarrow\quad \frac{y+2}{y-2}=C\,x^4$$

$$\frac{3+2}{3-2}=C\,1^4 \quad\Rightarrow\quad C=5 \quad\Rightarrow\quad \frac{y+2}{y-2}=5\,x^4$$

i) $$\frac{1}{\cos(x)}dx=e^{-2t}\,dt$$

Les variables sont séparées; on intègre :

$$\ln\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)=\frac{-1}{2}e^{-2t}+C \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}e^{-2t}+\ln\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)=C$$

j) $$\frac{1}{\sqrt{y}}dy=dx$$

Les variables sont séparées; on intègre :

$$2\sqrt{y}=x+C$$

$$2\sqrt{4}=0+C \quad\Rightarrow\quad C=4 \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{y}=x+4$$

2.3 On a $F(x,y)=\sqrt{y}$

Il faut évaluer $F(0,4)=2$; et $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x,y)=(0,4)}=\left.\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|_{y=4}=\frac{1}{4}$.

Les 2 fonctions sont continues dans une région autour du point $(0,4)$. Donc il existe une solution explicite unique.

Isolons donc y à partir de la solution trouvée en 2.2 j) :

$2\sqrt{y}=x+4 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{y}=\frac{x+4}{2}$; ici, on doit avoir $x>-4$

$$y=\frac{(x+4)^2}{4},\ x>-4$$

2.4- $y\,dy=-x\,dx$

Les variables sont séparées; on intègre :

$$\frac{y^2}{2}=\frac{-x^2}{2}+c \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=C$$

$$a^2+0^2=C \quad\Rightarrow\quad C=a^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=a^2$$

Les courbes sont des cercles centrés à l'origine, de rayon $|a|$.

Il faut que $-|a|\le x\le |a|$

Si $a=-3$, alors $y=-\sqrt{9-x^2}$

Le « – » devant le radical est là pour que y soit négatif, à cause de la condition initiale.

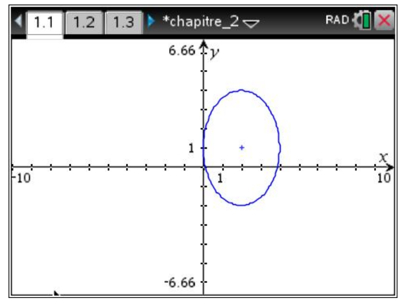
2.5- $9(x-2)\,dx+4(y-1)\,dy=0$

Les variables sont séparées; on intègre :

$$\frac{9}{2}(x-2)^2+2(y-1)^2=C \quad\Rightarrow\quad \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=\frac{C}{18}$$

$$\frac{0^2}{4}+\frac{3^2}{9}=\frac{C}{18} \quad\Rightarrow\quad \frac{C}{18}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

C'est l'équation d'une ellipse centrée en $(2,1)$, de largeur 4 (de 0 à 4) et de hauteur 6 (de –2 à 4).



2.6- $T(0)=100,\ T(10)=80,\ T_A=25\ :\ \dfrac{dT}{dt}=k(T-25)$

$$T(t)=75\left(\frac{11}{15}\right)^{t/10}+25$$

a) Après 20 minutes, l'eau est à 65ºC

b) Elle est à 40ºC après 51,9 minutes, elle est à 26ºC après 139,2 minutes, et à 25,5ºC après presque 162 minutes.

$\int \frac{1}{tpr-25}\,\mathrm{d}tpr=\int k\,\mathrm{d}t+c$	$\ln(tpr-25)=k\cdot t+c$
⚠ $e^{\ln(tpr-25)=k\cdot t+c}$	$tpr-25=e^{k\cdot t+c}$
$\left(tpr-25=e^{k\cdot t+c}\right)+25$	$tpr=e^{k\cdot t+c}+25$
$tpr=e^{k\cdot t+c}+25 \mid t=0 \text{ and } tpr=100$	$100=e^{c}+25$
$\text{solve}\left(100=e^{c}+25,c\right)$	$c=\ln(75)$
$tpr=e^{k\cdot t+c}+25 \mid c=\ln(75)$	$tpr=75\cdot e^{k\cdot t}+25$
$tpr=75\cdot e^{k\cdot t}+25 \mid t=10 \text{ and } tpr=80$	$80=75\cdot e^{10\cdot k}+25$
$\text{solve}\left(80=75\cdot e^{10\cdot k}+25,k\right)$	$k=\frac{\ln\left(\frac{11}{15}\right)}{10}$
$tpr=75\cdot e^{k\cdot t}+25 \mid k=\frac{\ln\left(\frac{11}{15}\right)}{10}$	$tpr=75\cdot\left(\frac{11}{15}\right)^{\frac{t}{10}}+25$
$tpr(t):=75\cdot\left(\frac{11}{15}\right)^{\frac{t}{10}}+25$	*Terminé*
$tpr(20.)$	65.3333
$\text{solve}(tpr(t)=40.,t)$	$t=51.8914$
$\text{solve}(tpr(t)=26.,t)$	$t=139.204$
$\text{solve}(tpr(t)=25.5,t)$	$t=161.553$

2.7- $T(0)=10,\ T(5)=15,\ T_A=40\ :\ \dfrac{dT}{dt}=k(T-40)$

$$T=40-30\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{t/5}$$

Ça prend 6,2 minutes de plus (donc 11,2 minutes en tout) pour qu’elle soit à 20ºC.

$\int \frac{1}{tpr-40}\, d\,tpr = \int k\, dt + c$	$\ln(tpr-40)=k\cdot t+c$
⚠ $e^{\ln(tpr-40)=k\cdot t+c}$	$tpr-40=e^{k\cdot t+c}$
$-(tpr-40)=e^{k\cdot t+c}$	$-(tpr-40)=e^{k\cdot t+c}$
©parce que tpr<40	
$\text{solve}\left(-(tpr-40)=e^{k\cdot t+c},tpr\right)$	$tpr=40-e^{k\cdot t+c}$
$tpr=40-e^{k\cdot t+c}\|t=0 \text{ and } tpr=10$	$10=40-e^{c}$
$\text{solve}\left(10=40-e^{c},c\right)$	$c=\ln(30)$
$tpr=40-e^{k\cdot t+c}\|c=\ln(30)$	$tpr=40-30\cdot e^{k\cdot t}$
$tpr=40-30\cdot e^{k\cdot t}\|t=5 \text{ and } tpr=15$	$15=40-30\cdot e^{5\cdot k}$
$\text{solve}\left(15=40-30\cdot e^{5\cdot k},k\right)$	$k=\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{5}$
$tpr=40-30\cdot e^{k\cdot t}\|k=\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{5}$	$tpr=40-30\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{t}{5}}$
$tpr(t):=40-30\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{t}{5}}$	*Terminé*
$\text{solve}\left(tpr(t)=20.,t\right)$	$t=11.1195$

2.8 Posons $t=0$ à 23h00, et prenons le temps t en heures. On considérera que la température à l'intérieur de la maison de Mme Frileuse suit la loi de Newton, avec la température ambiante qui est la température extérieure.

$T(0)=20,\ T(1)=16,\ T_A=-15\ :\ \frac{dT}{dt}=k(T+15)$

À 5h00 le lendemain matin, la température dans la chambre est 1,9ºC.

$\int \frac{1}{tpr+15}\, d\,tpr = \int k\, dt + c$	$\ln(tpr+15)=k\cdot t+c$
⚠ $e^{\ln(tpr+15)=k\cdot t+c}$	$tpr+15=e^{k\cdot t+c}$
$\left(tpr+15=e^{k\cdot t+c}\right)-15$	$tpr=e^{k\cdot t+c}-15$
$tpr=e^{k\cdot t+c}-15\|t=0 \text{ and } tpr=20$	$20=e^{c}-15$
$\text{solve}\left(20=e^{c}-15,c\right)$	$c=\ln(35)$
$tpr=e^{k\cdot t+c}-15\|c=\ln(35)$	$tpr=35\cdot e^{k\cdot t}-15$
$tpr=35\cdot e^{k\cdot t}-15\|t=1 \text{ and } tpr=16$	$16=35\cdot e^{k}-15$
$\text{solve}\left(16=35\cdot e^{k}-15,k\right)$	$k=\ln\left(\frac{31}{35}\right)$
$tpr=35\cdot e^{k\cdot t}-15\|k=\ln\left(\frac{31}{35}\right)$	$tpr=35\cdot\left(\frac{31}{35}\right)^{t}-15$
©À 5h00 le lendemain matin, on a t=6	
$tpr=35\cdot\left(\frac{31}{35}\right)^{t}-15\|t=6.$	$tpr=1.89779$

2.9 Posons $t=0$ à 6h20, au moment où le coroner mesure la première température. Et prenons le temps t en heures.

On a donc $T(0)=29,\ T(1)=28,\ T_A=21$: $\dfrac{dT}{dt}=k(T-21)$

On cherchera t pour que la température soit 37ºC.

On trouve $T(t)=21+8\left(\dfrac{7}{8}\right)^t$

$T(t)=37$ si $t=-5{,}19089$.

M. de la Malchance est donc mort <u>vers</u> 6h+20min–5,19h, c'est-à-dire 1h08min33s.

$\displaystyle\int_{29}^{tpr}\frac{1}{u-21}\,\mathrm{d}u=\int_0^t k\,\mathrm{d}v$	$\ln\left(\dfrac{tpr-21}{8}\right)=k\cdot t$
$\text{solve}\left(\ln\left(\dfrac{tpr-21}{8}\right)=k\cdot t,tpr\right)$	$tpr=8\cdot e^{k\cdot t}+21$
©Les intégrales définies nous permettent d'éviter la constante C.	
$\text{solve}\left(tpr=8\cdot e^{k\cdot t}+21 \mid t=1 \text{ and } tpr=28,k\right)$	$k=\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)$
$tpr=8\cdot e^{k\cdot t}+21 \mid k=\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)$	$tpr=8\cdot\left(\dfrac{7}{8}\right)^t+21$
$\text{solve}\left(8\cdot\left(\dfrac{7}{8}\right)^t+21=37,t\right)$	$t=\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)}$
$\text{solve}\left(8\cdot\left(\dfrac{7}{8}\right)^t+21=37,t\right)$	$t=^-5.19089$
$6+\dfrac{20}{60}+^-5.19089$	1.14244
1.1424433333333−1	0.142443
0.1424433333333· 60	8.5466
8.546599999998−8	0.5466
0.546599999998· 60	32.796

2.10 On prend t en minutes : $T(0)=25,\ T(1)=50,\ T(2)=73,\ T_A=???$:

$$\frac{dT}{dt}=k\left(T-T_A\right)$$

Avec les calculs présentés ci-dessous, on trouve $T_A=337{,}5$ºC.

$\int_{25}^{tpr} \frac{1}{u-ta}\, du = \int_{0}^{t} k\, dv$	$\ln\left(\frac{\lvert ta-tpr\rvert}{\lvert ta-25\rvert}\right)=k\cdot t$
©On a mis des valeurs absolues pour nous aider à remarquer que TA est sûrement > Tpr puisqu'on parle d'un four (chaud); et TA>25 aussi.	
©Donc on peut simplement enlever les valeurs absolues.	
$\ln\left(\frac{ta-tpr}{ta-25}\right)=k\cdot t$	$\ln\left(\frac{ta-tpr}{ta-25}\right)=k\cdot t$
$\text{solve}\left(\ln\left(\frac{ta-tpr}{ta-25}\right)=k\cdot t, tpr\right)$	$tpr=ta-(ta-25)\cdot e^{k\cdot t}$
©Nous aurons 2 équations, qui nous feront déterminer la valeur de k et celle de TA.	
$eq1:=tpr=ta-(ta-25)\cdot e^{k\cdot t} \vert t=1 \text{ and } tpr=50$	$50=ta-e^{k}\cdot(ta-25)$
$eq2:=tpr=ta-(ta-25)\cdot e^{k\cdot t} \vert t=2 \text{ and } tpr=73$	$73=ta-e^{2\cdot k}\cdot(ta-25)$
$\text{solve}\left(\begin{cases} eq1 \\ eq2 \end{cases}, \{ta,k\}\right)$	$k=\ln\left(\frac{23}{25}\right) \text{ and } ta=\frac{675}{2}$
$\text{solve}\left(\begin{cases} eq1 \\ eq2 \end{cases}, \{ta,k\}\right)$	$k=-0.083382 \text{ and } ta=337.5$
$tpr=ta-(ta-25)\cdot e^{k\cdot t} \vert k=\ln\left(\frac{23}{25}\right) \text{ and } ta=\frac{675}{2}$	$tpr=\frac{675}{2}-\frac{625\cdot\left(\frac{23}{25}\right)^{t}}{2}$

[RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 2]

Section 2.2 : équations linéaires, désintégration radioactive

2.11-a) En isolant la dérivée, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y - \dfrac{3}{x^2}$, on voit que l'équation est linéaire; on a

$P(x) = \dfrac{-4}{x}$ et $Q(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

b) Cette équation n'est pas linéaire à cause du x (variable dépendante) au dénominateur dans $\dfrac{t}{x}$.

c) Cette équation est directement sous la forme voulue : elle est linéaire.

$P(x) = \cos(2x)$ et $Q(x) = \dfrac{2x}{e^x}$

d) On isole la dérivée : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x}{t} - \dfrac{3\sin(t)}{2t}$; l'équation est linéaire.

$P(t) = \dfrac{-2}{t}$ et $Q(t) = \dfrac{-3\sin(t)}{2t}$.

2.12- a) $P(x) = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$

$$y \cdot x = \int 4x\,dx = 2x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = 2x + \frac{C}{x}$$

b) $P(t) = -6 \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^{-6t}$

$$x \cdot e^{-6t} = \int 10e^{-6t}\sin(2t)\,dt = \frac{-1}{2}e^{-6t}\left(\cos(2t) + 3\sin(2t)\right) + C$$

$$x = \frac{-1}{2}\left(\cos(2t) + 3\sin(2t)\right) + C\,e^{6t}$$

c) $P(t) = 4 \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^{4t}$

$$i \cdot e^{4t} = \int e^{-5t} \cdot e^{4t}\,dt = -e^{-t} + C$$

$$i = C\,e^{-4t} - e^{-5t}$$

$$i(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 6 \quad \Rightarrow \quad i = 6e^{-4t} - e^{-5t}$$

d) $P(t) = 5 \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^{5t}$

$$i \cdot e^{5t} = \int e^{-5t} \cdot e^{5t}\, dt = t + C$$
$$i = t \cdot e^{-5t} + C\, e^{-5t}$$
$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad i = t \cdot e^{-5t}$$

e) $$\frac{dy}{dx} + y\frac{3}{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad P(x) = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = x^3$$
$$y \cdot x^3 = \int 2x^3\, dx = \frac{1}{2}x^4 + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x^3}$$

f) $$\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{-2}{x}\right) = x^2 e^x \quad \Rightarrow \quad P(x) = \frac{-2}{x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$y\frac{1}{x^2} = \int x^2 e^x \frac{1}{x^2}\, dx = e^x + C \quad \Rightarrow \quad y = \left(e^x + C\right)x^2$$

g) $$\frac{dy}{dt} - \frac{2}{t}y = t^2 \cos(t) \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{-2}{t} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{t^2}$$
$$y\frac{1}{t^2} = \int t^2 \cos(t) \frac{1}{t^2}\, dt = \sin(t) + C \quad \Rightarrow \quad y = t^2\left(\sin(t) + C\right)$$
$$y\left(\pi/2\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{\pi^2}{4}(1 + C) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{12}{\pi^2} - 1$$
$$y = t^2\left(\sin(t) + \frac{12}{\pi^2} - 1\right)$$

2.13-a) variables séparables : $4x\, dx = \frac{1}{t^2+4}\, dt \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C$

b) linéaire, $P(\theta) = \frac{-2}{\theta}$, $Q(\theta) = \theta^3 e^{-2\theta}$
$$u(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \quad \Rightarrow \quad r\frac{1}{\theta^2} = \int \frac{\theta^3 e^{-2\theta}}{\theta^2}\, d\theta = \left(\frac{-\theta}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2\theta} + C$$
$$r = C \cdot \theta^2 - \frac{2\theta^3 + \theta^2}{4}e^{-2\theta}$$

c) linéaire : $P(x) = -2$, $Q(x) = 4\cos(3x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = e^{-2x}$
$$y \cdot e^{-2x} = \int 4e^{-2x} \cos(3x)\, dx = \frac{4}{13}e^{-2x}\left(3\sin(3x) - 2\cos(3x)\right) + C$$

$$y=\frac{12}{13}\sin(3x)-\frac{8}{13}\cos(3x)+C\cdot e^{2x}$$

d) linéaire : $\dfrac{di}{dt}+200i=1100 \quad\Rightarrow\quad P(t)=200\ ,\ Q(t)=1100 \quad\Rightarrow\quad u(t)=e^{200t}$

$$i\cdot e^{200t}=\int 1100e^{200t}\,dt=\frac{11}{2}e^{200t}+C \quad\Rightarrow\quad i=\frac{11}{2}+C\cdot e^{-200t}$$

$$i(0)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=\frac{11}{2}+C \quad\Rightarrow\quad C=\frac{-11}{2} \quad\Rightarrow\quad i=\frac{11}{2}\left(1-e^{-200t}\right)$$

e) directement intégrable : $\dfrac{d^2y}{dx^2}=4 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}=4x+C_1 \quad\Rightarrow\quad y=2x^2+C_1x+C_2$

f) linéaire : $P(t)=\dfrac{-1}{t}\ ,\ Q(t)=\sin t \quad\Rightarrow\quad u(t)=\dfrac{1}{t} \quad\Rightarrow\quad x\dfrac{1}{t}=\displaystyle\int\frac{1}{t}\sin(t)\,dt$

Cette intégrale ne possède pas de primitive simple; nous utiliserons donc la condition initiale :

$$\frac{x(t)}{t}-\frac{x(1)}{1}=\int_1^t\frac{1}{u}\sin(u)\,du$$

$$\frac{x(t)}{t}-\frac{2}{1}=\int_1^t\frac{1}{u}\sin(u)\,dt \quad\Rightarrow\quad \frac{x(t)}{t}=2+\int_1^t\frac{1}{u}\sin(u)\,dt$$

$$x(t)=t\cdot\left(2+\int_1^t\frac{1}{u}\sin(u)\,du\right)$$

g) linéaire : $\dfrac{dy}{dx}+y\dfrac{e^x}{1+e^x}=0 \quad\Rightarrow\quad P(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}\ ,\ Q(x)=0$

$$u(x)=e^{\int\frac{e^x}{1+e^x}dx}=e^{\ln\left(1+e^x\right)}=1+e^x \quad\Rightarrow\quad y\cdot\left(1+e^x\right)=C \quad\Rightarrow\quad y=\frac{C}{1+e^x}$$

$$y(0)=2 \quad\Rightarrow\quad 2=\frac{C}{1+1} \quad\Rightarrow\quad C=4 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{4}{1+e^x}$$

2.14- On pose $Q(0)=Q_0$ avec le temps t en minutes; alors $Q(20)=\dfrac{1}{2}Q_0$ puisque $t_d=20$.

$$\frac{dQ}{dt}=-k\cdot Q \quad\Rightarrow\quad Q=Q_0e^{-kt};\ k=\frac{\ln(2)}{20} \quad\Rightarrow\quad Q=Q_0\cdot 2^{-t/20}$$

La quantité disparue est $Q_0 -$ la quantité restante : il en disparaît 29% en 10 minutes, 75% en 40 minutes, et 98,4% en 2 heures.

$e^{\int k\,dt}$	$e^{k\cdot t}$
$\text{solve}\left(q\cdot e^{k\cdot t}=c \mid q=q0 \text{ and } t=0,c\right)$	$c=q0$
$\text{solve}\left(q\cdot e^{k\cdot t}=q0,q\right)$	$q=q0\cdot e^{-k\cdot t}$
$\text{solve}\left(q=q0\cdot e^{-k\cdot t} \mid q=\frac{q0}{2} \text{ and } t=20,k\right)$	$k=\frac{\ln(2)}{20}$
$q=q0\cdot e^{-k\cdot t} \mid k=\frac{\ln(2)}{20}$	$q=q0\cdot 2^{\frac{-t}{20}}$
$q(t):=q0\cdot 2^{\frac{-t}{20}}$	*Terminé*
$q0-q(10.)$	$0.292893\cdot q0$
$q0-q(40.)$	$0.75\cdot q0$
$q0-q(120.)$	$0.984375\cdot q0$

2.15- Si 15% se désintègre, alors il en reste 85%.

$$Q=Q_0e^{-kt} \text{ avec } Q(15)=0,85Q_0 \quad\Rightarrow\quad Q(t)=Q_0\left(\frac{17}{20}\right)^{t/15}$$

On trouve que la demi-vie de cet élément est presque 64 jours.

$\text{solve}\left(\frac{85}{100}\cdot q0=q0\cdot e^{-15\cdot k},k\right)$	$k=\frac{-\ln\left(\frac{17}{20}\right)}{15}$
$q0\cdot e^{-k\cdot t} \mid k=\frac{-\ln\left(\frac{17}{20}\right)}{15}$	$q0\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^{\frac{t}{15}}$
$\text{solve}\left(q0\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^{\frac{t}{15}}=\frac{q0}{2},t\right)$	$t=63.9754$

2.16- $Q=Q_0e^{-kt}$ avec $Q(200)=0,8Q_0 \quad\Rightarrow\quad Q(t)=Q_0\left(\frac{4}{5}\right)^{t/200}$

Ça prend 1442,5 jours pour n'avoir que 20% de la quantité initiale.

$\text{solve}\left(\frac{80}{100}\cdot q0=q0\cdot \mathbf{e}^{-200\cdot k},k\right)$	$k=\frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{200}$
$q0\cdot \mathbf{e}^{-k\cdot t}\mid k=\frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{200}$	$q0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{200}}$
$\text{solve}\left(q0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{200}}=0.2\cdot q0,t\right)$	$t=1442.51$

2.17- $Q=Q_0e^{-kt}$ avec $Q(5730)=0{,}5Q_0 \quad\Rightarrow\quad Q(t)=Q_0\,2^{-t/5730}$

On trouve que l'animal est mort il y a environ 22933 ans.

$\text{solve}\left(\frac{1}{2}\cdot q0=q0\cdot \mathbf{e}^{-k\cdot 5730},k\right)$	$k=\frac{\ln(2)}{5730}$
$q=q0\cdot \mathbf{e}^{-k\cdot t}\mid k=\frac{\ln(2)}{5730}$	$q=q0\cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$
$\text{solve}\left(0.0624\cdot q0=q0\cdot 2^{\frac{-t}{5730}},t\right)$	$t=22933.2$

2.18- Soit Q la quantité de la substance. Alors le taux de variation de Q (donc la dérivée de Q) est proportionnel à l'inverse de Q : $\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{k}{Q}$.

On a que $Q(0)=50$, $Q(2)=40$; on cherche t pour que $Q(t)=0$.

Variables séparables : $Q\,dQ=k\,dt \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}Q^2=k\,t+c \quad\Rightarrow\quad Q^2=2k\,t+C$

On peut extraire la racine carrée pour isoler Q puisque Q est toujours positif.

$Q=\sqrt{2k\,t+C}$

$Q(0)=50 \quad\Rightarrow\quad 50=\sqrt{C} \quad\Rightarrow\quad C=2500 \quad\Rightarrow\quad Q=\sqrt{2k\,t+2500}$

$Q(2)=40 \quad\Rightarrow\quad 40=\sqrt{4k+2500} \quad\Rightarrow\quad k=-225 \quad\Rightarrow\quad Q=\sqrt{2500-450t}$

$\sqrt{2500-450t}=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{50}{9}\approx 5{,}56$

Ça prend un peu plus que 5 jours et demi pour que la substance disparaisse.

2.19- Si on suit le conseil qui nous est donné et qu'on inverse les variables, alors on considère plutôt $\dfrac{dx}{dy}=x+y \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dx}{dy}-x=y$.

On obtient une équation linéaire, avec $P(y)=-1 \quad\Rightarrow\quad u(y)=e^{-y}$ et $Q(y)=y$.

Alors $x\cdot e^{-y}=\int y\,e^{-y}\,dy=(-y-1)e^{-y}+C \;\Rightarrow\; x=C\,e^{y}-y-1$, ce qui est équivalent à la réponse donnée.

2.20- Posons $v=\ln(y)$, alors $y=e^{v}$

On calcule la dérivée pour effectuer le changement de variable : $\dfrac{dy}{dx}=e^{v}\dfrac{dv}{dx}$

L'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx}+y\,P(x)=Q(x)\,y\ln(y)$ devient donc

$e^{v}\dfrac{dv}{dx}+e^{v}\cdot P(x)=Q(x)\cdot e^{v}\cdot v$

$\Rightarrow\;\; \dfrac{dv}{dx}-v\cdot Q(x)=-P(x)$ est linéaire en *v*.

La solution est donnée par $v\cdot u(x)=\int -P(x)\cdot u(x)\,dx+C$, où $u(x)=e^{\int -Q(x)\,dx}$.

Finalement, $\ln(y)=\dfrac{\int -P(x)\cdot u(x)\,dx+C}{u(x)}$

2.21- On est dans la situation du problème précédent, avec $P(x)=x^{3}$ et $Q(x)=2x$.

En posant $v=\ln(y)$, on obtiendra l'équation $\dfrac{dv}{dx}-v\cdot 2x=-x^{3}$

$u(x)=e^{-x^{2}}$ et

$v\cdot e^{-x^{2}}=\int -x^{3}\cdot e^{-x^{2}}\,dx=\dfrac{x^{2}+1}{2}e^{-x^{2}}+C$

$\ln(y)=\dfrac{x^{2}+1}{2}+C\cdot e^{x^{2}}$

2.22- Si $x\le 2$, on résout l'équation $\dfrac{dy}{dx}+y=1$ avec $y(0)=0$.

linéaire, avec $P(x)=1$, donc $u(x)=e^{x}$

$y\cdot e^{x}=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C_1$

$y(0)=0 \;\Rightarrow\; 0=1+C_1 \;\Rightarrow\; C_1=-1 \;\Rightarrow\; y=1-e^{-x}$.

Ce résultat nous donne que $y(2)=1-e^{-2}$; c'est la condition initiale que nous utiliserons pour résoudre l'équation $\dfrac{dy}{dx}+y=0$ quand $x>2$.

$y\cdot e^{x}=\int 0\,dx=C_2 \;\Rightarrow\; y=C_2\cdot e^{-x}$

$y(2)=1-e^{-2} \;\Rightarrow\; 1-e^{-2}=C_2\cdot e^{-2} \;\Rightarrow\; C_2=e^{2}-1 \;\Rightarrow\; y=e^{2-x}-e^{-x}$

$$y(x)=\begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \le 2 \\ e^{-x}\cdot\left(e^{2}-1\right) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 2

Section 2.3 : équations exactes

2.23-a) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}+2x\,y^2\right)=\dfrac{1}{x}+4x\,y$

$\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x)+2x^2\,y\right)=\dfrac{1}{x}+4x\,y$

Les 2 dérivées partielles sont égales, donc l'équation est exacte.

$V(x,y)=\int\dfrac{y}{x}+2x\,y^2\,dx+c(y)=y\ln(x)+x^2\,y^2+c(y)$

$\dfrac{\partial\left(y\ln(x)+x^2\,y^2+c(y)\right)}{\partial y}=\ln(x)+2x^2\,y+c'(y)\overset{doit}{=}\ln(x)+2x^2\,y\quad\Rightarrow\quad c'(y)=0$

La solution est $y\ln(x)+x^2\,y^2=C$

b) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(y^3+e^{-x}-x\,e^{-x}\right)}{\partial y}=3y^2=\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(3x\,y^2\right)}{\partial x}$

L'équation différentielle est exacte.

$V(x,y)=\int\left(y^3+e^{-x}-x\,e^{-x}\right)dx+c(y)=x\,y^3+x\,e^{-x}+c(y)$

$\dfrac{\partial\left(x\,y^3+x\,e^{-x}+c(y)\right)}{\partial y}=3x\,y^2+c'(y)\overset{doit}{=}3x\,y^2\quad\Rightarrow\quad c'(y)=0$

$x\,y^3+x\,e^{-x}=C$

c) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(2x^2+2x\,y\right)}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x}$

L'équation est exacte.

$V(x,y)=\int\left(2x^2+2x\,y\right)dx=\dfrac{2}{3}x^3+x^2y+c(y)$

$\dfrac{\partial\left(\dfrac{2}{3}x^3+x^2y+c(y)\right)}{\partial y}=x^2+c'(y)\overset{doit}{=}x^2+y^2\quad\Rightarrow\quad c'(y)=y^2\quad\Rightarrow\quad c(y)=\dfrac{y^3}{3}$

$\dfrac{2}{3}x^3+x^2y+\dfrac{1}{3}y^3=C_1\quad\Rightarrow\quad 2x^3+3x^2y+y^3=C$

d) $\dfrac{\partial M}{\partial v}=\dfrac{\partial\left(8v\sin(2u)+2u\right)}{\partial v}=8\sin(2u)=\dfrac{\partial N}{\partial u}=\dfrac{\partial\left(-4\cos(2u)\right)}{\partial u}$

L'équation est exacte.

$V(u,v)=\int\left(8v\sin(2u)+2u\right)du+c(v)=-4v\cos(2u)+u^2+c(v)$

$$\frac{\partial\left(-4v\cos(2u)+u^2+c(v)\right)}{\partial v}=-4\cos(2u)+c'(v)\overset{doit}{=}-4\cos(2u)\quad\Rightarrow\quad c'(v)=0$$

$$u^2-4v\cos(2u)=C$$

e) L'équation doit être réécrite : $4x^3y\,dx+\left(x^4-4y^3\right)dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(4x^3y\right)}{\partial y}=4x^3=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^4-4y^3\right)}{\partial x}$$

L'équation est exacte.

$$V(x,y)=\int 4x^3y\,dx+c(y)=x^4y+c(y)$$

$$\frac{\partial\left(x^4y+c(y)\right)}{\partial y}=x^4+c'(y)\overset{doit}{=}x^4-4y^3\quad\Rightarrow\quad c'(y)=-4y^3\quad\Rightarrow\quad c(y)=-y^4$$

La solution générale est $x^4y-y^4=C$

$y(1)=4\quad\Rightarrow\quad 1^4\cdot4-4^4=-252=C$

$y^4-x^4y=252$ (Nous avons changé les signes...)

f) Il faut réécrire l'équation : $\left(y+\cos(x+y)\right)dx+\left(x+\cos(x+y)\right)dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(y+\cos(x+y)\right)}{\partial y}=1-\sin(x+y)=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(x+\cos(x+y)\right)}{\partial x}$$

L'équation différentielle est exacte.

$$V(x,y)=\int\left(y+\cos(x+y)\right)dx+c(y)=x\cdot y+\sin(x+y)+c(y)$$

$$\frac{\partial\left(x\cdot y+\sin(x+y)+c(y)\right)}{\partial y}=x+\cos(x+y)+c'(y)\overset{doit}{=}x+\cos(x+y)\Rightarrow c'(y)=0$$

$$x\cdot y+\sin(x+y)=C$$

$$y(0)=\pi/6\quad\Rightarrow\quad 0\cdot\frac{\pi}{6}+\sin\left(0+\frac{\pi}{6}\right)=0+\frac{1}{2}=C$$

$$x\cdot y+\sin(x+y)=\frac{1}{2}$$

g) $\dfrac{\partial M}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(e^t(x-t)\right)}{\partial x}=e^t=\dfrac{\partial N}{\partial t}=\dfrac{\partial\left(1+e^t\right)}{\partial t}$

Donc l'équation est exacte.

$$V(t,x)=\int\left(e^t(x-t)\right)dt+c(x)=e^t(x+1-t)+c(x)$$

$$\frac{\partial\left(e^t(x+1-t)+c(x)\right)}{\partial x}=e^t+c'(x)\overset{doit}{=}e^t+1\quad\Rightarrow\quad c'(x)=1\quad\Rightarrow\quad c(x)=x$$

$$e^t\left(x+1-t\right)+x=C$$

2.24-a) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(-x\,y+2y^2\right)}{\partial y}=-x+4y \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(x^2-2x\,y\right)}{\partial x}=2x-2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-x+4y-2x+2y=6y-3x$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{6y-3x}{x^2-2x\,y}=\frac{-3}{x} \quad\Rightarrow\quad u\left(x\right)=\frac{1}{x^3}$$

L'équation devient $\left(\dfrac{-y}{x^2}+2\dfrac{y^2}{x^3}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}-2\dfrac{y}{x^2}\right)dy=0$, qui est exacte.

$$V\left(x,y\right)=\int\left(\frac{-y}{x^2}+2\frac{y^2}{x^3}\right)dx=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}+c\left(y\right)$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}+c\left(y\right)\right)}{\partial y}=\frac{1}{x}-2\frac{y}{x^2}+c'\left(y\right)\overset{doit}{=}\frac{1}{x}-2\frac{y}{x^2} \quad\Rightarrow\quad c'\left(y\right)=0$$

$$\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}=C$$

Si on résout en séparant les variables, on a

$$y\cdot\left(-x+2y\right)dx-x\cdot\left(2y-x\right)dy=0$$

$$y\,dx-x\,dy=0 \text{ si } 2y-x\neq 0$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{y}dy,\left(x\neq 0,y\neq 0\right) \quad\Rightarrow\quad \ln\left(x\right)+k=\ln\left(y\right) \quad\Rightarrow\quad c\cdot x=y,\ c\neq\frac{1}{2}$$

On peut vérifier que la solution $y=c\,x$ satisfait la solution que nous avions trouvée avec un facteur intégrant :

$$\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}=C,\ \text{avec}\ y=c\,x\Rightarrow\frac{c\,x}{x}-\frac{c^2x^2}{x^2}=c-c^2=C$$

b) $\left(x^2+y^2\right)dx-2x\,y\,dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(-2x\,y\right)}{\partial x}=-2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y+2y=4y$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4y}{-2x\,y}=\frac{-2}{x} \quad\Rightarrow\quad u\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$$

L'équation exacte est $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0$

$$V(x,y)=\int\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx=x-\frac{y^2}{x}+c(y)$$

$$\frac{\partial\left(x-\frac{y^2}{x}+c(y)\right)}{\partial y}=\frac{-2y}{x}+c'(x)\overset{doit}{=}\frac{-2y}{x}\quad\Rightarrow\quad c'(x)=0$$

$$x-\frac{y^2}{x}=C$$

c) $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(y\ln(y)+ye^x\right)}{\partial y}=\ln(y)+1+e^x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(x+y\cos(y)\right)}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\ln(y)+1+e^x-1=\ln(y)+e^x$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{\ln(y)+e^x}{y\ln(y)+ye^x}=\frac{1}{y}\quad\Rightarrow\quad u(y)=\frac{1}{y}$$

L'équation à résoudre est donc $\left(\ln(y)+e^x\right)dx+\left(\frac{x}{y}+\cos(y)\right)dy=0$

$$V(x,y)=\int\left(\ln(y)+e^x\right)dx=x\ln(y)+e^x+c(y)$$

$$\frac{\partial\left(x\ln(y)+e^x+c(y)\right)}{\partial y}=\frac{x}{y}+c'(y)\overset{doit}{=}\frac{x}{y}+\cos(y)$$

$$\Rightarrow\quad c'(y)=\cos(y)\quad\Rightarrow\quad c(y)=\sin(y)$$

$$x\ln(y)+e^x+\sin(y)=C$$

d) $$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial\left(2t-e^{2x-t}\right)}{\partial x}=-2e^{2x-t}\qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial\left(-2t^2\right)}{\partial t}=-4t$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}=-2e^{2x-t}+4t$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}=\frac{4t-2e^{2x-t}}{2t-e^{2x-t}}=2\quad\Rightarrow\quad u(x)=e^{-2x}$$

En multipliant par le facteur intégrant, on obtient l'équation

$$\left(2t\,e^{-2x}-e^{-t}\right)dy-2t^2\,e^{-2x}\,dx=0$$

$$V(t,x)=\int\left(2t\,e^{-2x}-e^{-t}\right)dt=t^2\,e^{-2x}+e^{-t}+c(x)$$

$$\frac{\partial\left(t^2\,e^{-2x}+e^{-t}+c(x)\right)}{\partial x}=-2t^2e^{-2x}+c'(x)\overset{doit}{=}-2t^2e^{-2x}\quad\Rightarrow\quad c'(x)=0$$

$$t^2\,e^{-2x}+e^{-t}=C$$

e) $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(-2e^{2x}\cos(2y)-y^2e^{-4x}\right)}{\partial y}=4e^{2x}\sin(2y)-2y\,e^{-4x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(e^{2x}\sin(2y)+y\,e^{-4x}\right)}{\partial x}=2e^{2x}\sin(2y)-4y\,e^{-4x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2e^{2x}\sin(2y)+2y\,e^{-4x}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2e^{2x}\sin(2y)+2y\,e^{-4x}}{e^{2x}\sin(2y)+y\,e^{-4x}}=2\quad\Rightarrow\quad u(x)=e^{2x}$$

L'équation devient $\left(-2e^{4x}\cos(2y)-y^2e^{-2x}\right)dx+\left(e^{4x}\sin(2y)+y\,e^{-2x}\right)dy=0$

$$V(x,y)=\int\left(-2e^{4x}\cos(2y)-y^2e^{-2x}\right)dx=\frac{-1}{2}e^{4x}\cos(2y)+\frac{1}{2}y^2\,e^{-2x}+c(y)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{-1}{2}e^{4x}\cos(2y)+\frac{1}{2}y^2\,e^{-2x}+c(y)\right)}{\partial y}=e^{4x}\sin(2x)+y\,e^{-2x}+c'(y)$$

$$e^{4x}\sin(2x)+y\,e^{-2x}+c'(y)\overset{doit}{=}e^{4x}\sin(2x)+y\,e^{-2x}\quad\Rightarrow\quad c'(y)=0$$

$$\frac{-1}{2}e^{4x}\cos(2y)+\frac{1}{2}y^2\,e^{-2x}=C$$

f) $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(2y^2+2y+4x^2\right)}{\partial y}=4y+2\qquad\qquad\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(2x\,y+x)}{\partial x}=2y+1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y+1$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y+1}{2x\,y+x}=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad u(x)=x$$

L'équation exacte est $\left(2x\,y^2+2x\,y+4x^3\right)dx+\left(2x^2y+x^2\right)dy=0$

$$V(x,y)=\int\left(2x\,y^2+2x\,y+4x^3\right)dx=x^2y^2+x^2y+x^4+c(y)$$

$$\frac{\partial\left(x^2y^2+x^2y+x^4+c(y)\right)}{\partial y}=2x^2y+x^2+c'(y)\overset{doit}{=}2x^2y+x^2 \quad\Rightarrow\quad c'(y)=0$$

La solution générale est $x^2y^2+x^2y+x^4=C$

$y(1)=1 \quad\Rightarrow\quad 1^21^2+1^21+1^4=1+1+1=3=C$

$x^2y^2+x^2y+x^4=3$

2.25- Il faut commencer par écrire l'équation avec des différentielles :

$\left(y\,P(x)-Q(x)\right)dx+dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(y\,P(x)-Q(x)\right)}{\partial y}=P(x) \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(1)}{\partial x}=0$$

Les deux dérivées ne sont pas égales, donc l'équation n'est pas exacte.

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=P(x) \text{ et } \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{P(x)}{1}=P(x) \quad\Rightarrow\quad u(x)=e^{\int P(x)dx}$$

Le facteur intégrant est bel et bien celui que nous avons utilisé dans la section sur les équations linéaires.

2.26-a) On multiplie l'équation $\left(2y^2+3x\,y\right)dx+\left(4x\,y+3x^2\right)dy=0$ par $x^n y^m$.

Le résultat doit être une équation exacte.

$\left(2x^ny^{2+m}+3x^{1+n}y^{1+m}\right)dx+\left(4x^{1+n}y^{1+m}+3x^{2+n}y^m\right)dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(2x^ny^{2+m}+3x^{1+n}y^{1+m}\right)}{\partial y}=2\cdot(2+m)x^ny^{1+m}+3\cdot(1+m)x^{1+n}y^m$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(4x^{1+n}y^{1+m}+3x^{2+n}y^m\right)}{\partial x}=4\cdot(1+n)x^ny^{1+m}+3\cdot(2+n)x^{1+n}y^m$$

Alors $2\cdot(2+m)x^ny^{1+m}+3\cdot(1+m)x^{1+n}y^m==4\cdot(1+n)x^ny^{1+m}+3\cdot(2+n)x^{1+n}y^m$

Donc il faut que $2(2+m)=4(1+n)$ et $3(1+m)=3(2+n)$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}2\cdot(2+m)=4\cdot(1+n)\\3\cdot(1+m)=3\cdot(2+n)\end{cases},\{m,n\}\right)$$

$m=2$ and $n=1$

Le facteur intégrant est donc $x\cdot y^2$

b) $\left(2x\,y^4+3x^2\,y^3\right)dx+\left(4x^2\,y^3+3x^3\,y^2\right)dy=0$ est exacte.

$V(x,y)=\int\left(2x\,y^4+3x^2\,y^3\right)dx=x^2y^4+x^3y^3+c(y)$

$$\frac{\partial\left(x^2y^4+x^3y^3+c(y)\right)}{\partial y}=4x^2y^3+3x^3y^2+c'(y)\overset{doit}{=}4x^2y^3+3x^3y^2 \quad\Rightarrow\quad c'(y)=0$$

$x^2y^4+x^3y^3=C$

2.27- Il faut que $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{x+y}+2y\right)}{\partial x}=\dfrac{-1}{(x+y)^2}$

Donc $M(x,y)=\int\dfrac{\partial M}{\partial y}dy=\int\dfrac{-1}{(x+y)^2}dy=\dfrac{1}{x+y}+k(x)$ où $k(x)$ est n'importe quelle fonction qui ne dépend que de x.

L'équation est donc $\left(\dfrac{1}{x+y}+k(x)\right)dx+\left(\dfrac{1}{x+y}+2y\right)dy=0$

Calculons sa solution :

$$V(x,y)=\int\left(\frac{1}{x+y}+k(x)\right)dx=\ln(x+y)+\int k(x)dx+c(y)$$

$$\frac{\partial\left(\ln(x+y)+\int k(x)dx+c(y)\right)}{\partial y}=\frac{1}{x+y}+c'(y)\overset{doit}{=}\frac{1}{x+y}+2y$$

$$\Rightarrow\quad c'(y)=2y\quad\Rightarrow\quad c(y)=y^2$$

$$\ln(x+y)+\int k(x)dx+y^2=C$$

RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 2

Section 2.4 : changements de variables – homogènes et Bernoulli

2.28-a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \quad \Rightarrow \quad e^y\,dy = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad e^y = e^x + C$

b) $\quad v = x - y \quad \Rightarrow \quad y = x - v \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{dv}{dx}$

$1 - \dfrac{dv}{dx} = e^v \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx} = 1 - e^v \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{1-e^v}\,dv = dx$

$v - \ln\left(e^v - 1\right) = x + c$

$x - y - \ln\left(e^{x-y} - 1\right) = x + c$

$$\int \frac{1}{1-e^{v}}\,dv \qquad -\left(\ln\left(e^{v}-1\right)-v\right)$$

c) Prenons l'exponentielle de la réponse de b) et transformons-la pour obtenir la réponse de a).

$\dfrac{e^{x-y}}{e^{x-y}-1} = k\,e^x \quad \Rightarrow \quad e^{x-y} = k\,e^x\left(e^{x-y}-1\right)$

$\dfrac{e^x}{e^y} = k\,e^{2x-y} - k\,e^x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{e^y} = k\left(\dfrac{e^x}{e^y} - 1\right) = k\left(\dfrac{e^x - e^y}{e^y}\right)$, en simplifiant les e^x et en mettant sur un dénominateur commun.

Multiplions maintenant par e^y : $1 = k\left(e^x - e^y\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = k\,e^x - k\,e^y$

$k\,e^y = k\,e^x - 1 \quad \Rightarrow \quad e^y = e^x - \dfrac{1}{k}$

Et voilà le travail! avec $C = \dfrac{-1}{k}$.

2.29-a) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)$; on a donc bel et bien une fonction de $\dfrac{y}{x}$, et l'équation est homogène.

$v = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad F(v) = 1 + v \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{F(v) - v} = \dfrac{1}{1 + v - v} = 1$

$dv = \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad v = \ln(x) + C \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y}{x} = \ln(x) + C$

$y = x \cdot \ln(x) + C\,x$

b) $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x+3y} = \dfrac{y/x}{(2x+3y)/x} = \dfrac{y/x}{2 + 3\,y/x}$; donc l'équation est homogène.

On aurait aussi pu utiliser notre calculatrice avec $y = v \cdot x$. On voit que les x et les y disparaissent, donc l'équation est homogène.

$\frac{y}{2\cdot x+3\cdot y}\Big\vert y=v\cdot x$	$\frac{v}{3\cdot v+2}$

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad F(v) = \frac{v}{3v+2}$$

$$\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(3v+1) - 2\ln(v) = \ln(x) + c$$

$$\ln\left(3\frac{y}{x}+1\right) - 2\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + c$$

$\frac{y}{2\cdot x+3\cdot y}\Big\vert y=v\cdot x$	$\frac{v}{3\cdot v+2}$
$\frac{v}{3\cdot v+2} \to f(v)$	*Terminé*
$\int \frac{1}{f(v)-v}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx + c$	$\ln(3\cdot v+1)-2\cdot\ln(v)=\ln(x)+c$
$\ln(3\cdot v+1)-2\cdot\ln(v)=\ln(x)+c \Big\vert v=\frac{y}{x}$	$\ln\left(\frac{x+3\cdot y}{x}\right)-2\cdot\ln\left(\frac{y}{x}\right)=\ln(x)+c$
$e^{\ln\left(\frac{x+3\cdot y}{x}\right)-2\cdot\ln\left(\frac{y}{x}\right)=\ln(x)+c}$	$\frac{x\cdot(x+3\cdot y)}{y^2}=e^c\cdot x$
$\left(\frac{x\cdot(x+3\cdot y)}{y^2}=e^c\cdot x\right)\cdot y^2$	$x\cdot(x+3\cdot y)=e^c\cdot x\cdot y^2$
$\left(\frac{x\cdot(x+3\cdot y)}{y^2}=e^c\cdot x\right)\cdot \frac{y^2}{x}$	$x+3\cdot y=e^c\cdot y^2$
$\text{expand}\left(\frac{x\cdot(x+3\cdot y)=e^c\cdot x\cdot y^2}{x}\right)$	$x+3\cdot y=e^c\cdot y^2$
$\text{expand}\left(\frac{x\cdot(x+3\cdot y)=e^c\cdot x\cdot y^2}{x\cdot y^2}\right)$	$\frac{x}{y^2}+\frac{3}{y}=e^c$

On peut donner la solution sous diverses formes; vous en avez quelques-unes ici.

c) $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^{-1}$: l'équation est homogène.

$$v = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad F(v) = v + \frac{1}{v}$$

$$\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = \ln(t) + c \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{t^2} = 2\ln(t) + C$$

d) Isolons la dérivée et remplaçons $y = v \cdot x$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(x+2v\cdot x\right)}{2x+v\cdot x}=\frac{-\left(2v+1\right)}{v+2}$$; l'équation est homogène avec $F\left(v\right)=\dfrac{-\left(2v+1\right)}{v+2}$.

$$\int\frac{1}{F\left(v\right)-v}\,dv=\int\frac{1}{x}\,dx \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{2}\ln\left(v^2+4v+1\right)=\ln\left(x\right)+c$$

$$x^2+4x\,y+y^2=C$$

$\mathrm{solve}\left(x+2\cdot y+(2\cdot x+y)\cdot yp=0,yp\right)\vert y=v\cdot x$	$yp=\dfrac{-(2\cdot v+1)}{v+2}$ or $x=0$
$f(v):=\dfrac{-(2\cdot v+1)}{v+2}$	*Terminé*
$\displaystyle\int\frac{1}{f(v)-v}\,dv=\int\frac{1}{x}\,dx+c$	$\dfrac{-\ln\left(v^2+4\cdot v+1\right)}{2}=\ln(x)+c$
$\left(\dfrac{-\ln\left(v^2+4\cdot v+1\right)}{2}=\ln(x)+c\right)\cdot -2$	$\ln\left(v^2+4\cdot v+1\right)=-2\cdot\left(\ln(x)+c\right)$
$e^{\ln\left(v^2+4\cdot v+1\right)=-2\cdot\left(\ln(x)+c\right)}\vert v=\dfrac{y}{x}$	$\dfrac{x^2+4\cdot x\cdot y+y^2}{x^2}=\dfrac{e^{-2\cdot c}}{x^2}$
$\left(\dfrac{x^2+4\cdot x\cdot y+y^2}{x^2}=\dfrac{e^{-2\cdot c}}{x^2}\right)\cdot x^2$	$x^2+4\cdot x\cdot y+y^2=e^{-2\cdot c}$

e) $\dfrac{dy}{dx}=e^{y/x}+\dfrac{y}{x}$; l'équation est homogène.

$$v=\frac{y}{x} \quad\Rightarrow\quad F\left(v\right)=e^v+v$$

$$\frac{dv}{F\left(v\right)-v}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad -e^{-v}=\ln\left(x\right)+c \quad\Rightarrow\quad e^{-y/x}=C-\ln\left(x\right)$$

f) Isolons la dérivée et remplaçons $y=v\cdot x$:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3+v^3x^3}{x\,v^2x^2}=\dfrac{v^3+1}{v^2}=F\left(v\right)$. Cette équation est homogène.

$$\frac{dv}{F\left(v\right)-v}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{v^3}{3}=\ln\left(x\right)+c \quad\Rightarrow\quad y^3=3x^3\ln\left(x\right)+C\,x^3$$

$$y\left(1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 0^3=3\cdot1^3\cdot\ln\left(1\right)+C\cdot1^3 \quad\Rightarrow\quad 0=C$$

$$y^3=3x^3\ln\left(x\right)$$

g) $\dfrac{dx}{dt}=\left(\left(\dfrac{x}{t}\right)^{-1}+\dfrac{x}{t}\right)^{-1}$. Cette équation est homogène; remplaçons $x=v\cdot t$.

$$\frac{dx}{dt}=\left(v^{-1}+v\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{v}+v}=\frac{v}{1+v^2}=F\left(v\right)$$

$$-\ln(v)+\frac{1}{2v^2}=\ln(t)+C \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{2x^2}-\ln\left(\frac{x}{t}\right)=\ln(t)+C$$

Il faut insister un peu sur la calculatrice pour dire que $\ln\left(\frac{x}{t}\right)=\ln(x)-\ln(t)$, afin de simplifier; en fait on effectue cette modification manuellement.

On arrive à la solution $\dfrac{t^2}{2x^2}-\ln(x)=C$

$\left(\frac{t}{x}+\frac{x}{t}\right)^{-1} \mid x=v\cdot t$	$\frac{v}{v^2+1}$
$\frac{v}{v^2+1}\to f(v)$	*Terminé*
$\int\frac{1}{f(v)-v}\,dv=\int\frac{1}{t}\,dt+c$	$\frac{-(2\cdot v^2\cdot\ln(v)-1)}{2\cdot v^2}=\ln(t)+c$
$\text{expand}\left(\frac{-(2\cdot v^2\cdot\ln(v)-1)}{2\cdot v^2}=\ln(t)+c \mid v=\frac{x}{t}\right)$	$\frac{t^2}{2\cdot x^2}-\ln\left(\frac{x}{t}\right)=\ln(t)+c$
$\frac{t^2}{2\cdot x^2}-(\ln(x)-\ln(t))=\ln(t)+c$	$\ln(t)+\frac{t^2}{2\cdot x^2}-\ln(x)=\ln(t)+c$
$\left(\ln(t)+\frac{t^2}{2\cdot x^2}-\ln(x)=\ln(t)+c\right)-\ln(t)$	$\frac{t^2}{2\cdot x^2}-\ln(x)=c$

2.30-a) $n=5 \quad P(x)=-1 \quad Q(x)=x$

$1-n=-4 \quad v=y^{-4}$

L'équation devient $\dfrac{dv}{dx}+(-4)\cdot(-1)v=(-4)x$, qui est linéaire.

$$u(x)=e^{4x} \quad \Rightarrow \quad v\,e^{4x}=\int -4x\cdot e^{4x}\,dx=\left(-x+\frac{1}{4}\right)e^{4x}+C$$

$$\frac{1}{y^4}=\frac{1}{4}-x+C\,e^{-4x}$$

b) $\dfrac{dy}{dx}-y=x\,y^2 \quad \Rightarrow \quad n=2 \quad P(x)=-1 \quad Q(x)=x$

$1-n=-1 \quad \Rightarrow \quad v=y^{-1}$

L'équation devient $\dfrac{dv}{dx}+v=-x \quad \Rightarrow \quad u(x)=e^x$

$$v\cdot e^x=\int -x\cdot e^x\,dx=(1-x)e^x+C$$

$$\frac{1}{y}=1-x+C\,e^{-x}$$

c) $\dfrac{dx}{dt}+x=3e^t x^2 \quad\Rightarrow\quad n=2 \quad P(t)=1 \quad Q(t)=3e^t$

$1-n=-1 \quad\Rightarrow\quad v=x^{-1}$

Il faut résoudre $\dfrac{dv}{dt}-v=-3e^t \quad\Rightarrow\quad u(t)=e^{-t}$

$v\cdot e^{-t}=\int -3\,dt=-3t+C$

$\dfrac{1}{x}=(C-3t)e^t$

d) $y'-x\,y=-x\,y^{-1} \quad\Rightarrow\quad n=-1 \quad P(x)=-x \quad Q(x)=-x$

$1-n=2 \quad\Rightarrow\quad v=y^2$

On a à résoudre $\dfrac{dv}{dx}-2x\,v=-2x \quad\Rightarrow\quad u(x)=e^{-x^2}$

$v\,e^{-x^2}=\int -2x\,e^{-x^2}\,dx=e^{-x^2}+C$

$y^2=1+C\,e^{x^2}$

e) $\dfrac{dy}{dx}+y=e^x\,y^2 \quad\Rightarrow\quad n=2 \quad P(x)=1 \quad Q(x)=e^x$

$1-n=-1 \quad\Rightarrow\quad v=y^{-1}$

$\dfrac{dv}{dx}-v=-e^x \quad\Rightarrow\quad u(x)=e^{-x}$

$v\,e^{-x}=\int -e^x\,e^{-x}\,dx=-x+C$

$\dfrac{1}{y}=(C-x)e^x \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{1}{(C-x)e^x} \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{e^{-x}}{C-x}$

f) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{2x}=-y^5 \quad\Rightarrow\quad n=5 \quad P(x)=\dfrac{-1}{2x} \quad Q(x)=-1$

$1-n=-4 \quad\Rightarrow\quad v=y^{-4}$

$\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{2}{x}v=4 \quad\Rightarrow\quad u(x)=x^2$

$v\,x^2=\int 4x^2\,dx=\dfrac{4}{3}x^3+C$

$y^{-4}=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{C}{x^2}$

2.31-a) Posons $v=x-4y+2$.

Il faut calculer la dérivée, par rapport à x : $\dfrac{dv}{dx}=1-4\dfrac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\dfrac{dv}{dx}$

Alors l'équation devient $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\dfrac{dv}{dx}=v^2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dv}{dx}=1-4v^2$

variables séparables : $\displaystyle\int\frac{1}{1-4v^2}dv=\int dx+c$

$$\frac{-1}{4}\ln\left(\frac{2v-1}{2v+1}\right)=x+c \quad\Rightarrow\quad \frac{2v-1}{2v+1}=C\,e^{-4x}$$

$$\frac{2x-8y+3}{2x-8y+5}=C\,e^{-4x}$$

b) Ici on peut poser $v=2y-x+4$.

Alors $\dfrac{dv}{dx}=2\dfrac{dy}{dx}-1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dx}$ et $x-2y=4-v$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}=\frac{4-v}{v} \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dx}=\frac{2(4-v)}{v}-1=\frac{8-3v}{v}$$

$$\int\frac{v}{8-3v}dv=x+c \quad\Rightarrow\quad \frac{-\left(8\ln(3v-8)+3v\right)}{9}=x+c$$

$$8\ln(3v-8)+3v=-9x+k \quad\Rightarrow\quad 8\ln(3v-8)+3v+9x=k$$

$$e^{3v+9x}(3v-8)^8=C \quad\Rightarrow\quad e^{6y+6x+12}(6y-3x+4)^8=C$$

On pourrait multiplier par e^{-12}, qui est une constante, pour obtenir

$$e^{6y+6x}(6y-3x+4)^8=C_2$$

Et puisque $(6y-3x+4)$ est exposant 8 (pair), on peut le multiplier par (-1) :

$e^{6y+6x}(3x-6y-4)^8=C_2$; c'est la réponse qu'on aurait obtenue si on avait posé le changement de variable $v=x-2y$, au début, au lieu de $v=2y-x+4$

2.32-a) On va utiliser v au lieu de u.

Avec $v=y'$ et $v'=y''$, l'équation $y''+y'=3x-5$ devient $v'+v=3x-5$

Cette équation est linéaire, avec $P(x)=1$ et $Q(x)=3x-5 \quad\Rightarrow\quad u(x)=e^x$

$$v\cdot e^x=\int e^x(3x-5)\,dx \quad\Rightarrow\quad v\cdot e^x=(3x-8)e^x+C_1$$

$$y'=v=3x-8+c_1e^{-x} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{3}{2}x^2-8x+C_1e^{-x}+C_2$$

b) Ici aussi on va utiliser v au lieu de u.

L'équation donnée devient $t\,v'+v=4-x$.

$v'+\dfrac{1}{x}v=\dfrac{4}{x}-1$ est linéaire avec $P(x)=\dfrac{1}{x}$ et $Q(x)=\dfrac{4}{x}-1 \quad\Rightarrow\quad u(x)=x$

$$v\cdot x=\int(4-x)\,dx=4x-\frac{1}{2}x^2+C_1 \quad\Rightarrow\quad y'=v=4-\frac{1}{2}x+\frac{C_1}{x}$$
$$y=\int\left(4-\frac{1}{2}x+\frac{C_1}{x}\right)dx=4x-\frac{1}{4}x^2+C_1\ln(x)+C_2$$

2.33-a) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=2\dfrac{x}{y}$; Bernoulli avec $n=-1 \quad P(x)=\dfrac{-1}{x} \quad Q(x)=2x$

$$1-n=2 \quad\Rightarrow\quad v=y^2$$
$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v=4x \quad\Rightarrow\quad u(x)=\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{v}{x^2}=\int\frac{4}{x}dx=4\ln(x)+C \quad\Rightarrow\quad v=y^2=4x^2\ln(x)+C\,x^2$$

homogène : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+2\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$

$$v=\frac{y}{x} \quad F(v)=v+\frac{2}{v}$$
$$\frac{dv}{F(v)-v}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{v}{2}dv=\int\frac{1}{x}dx \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}v^2=\ln(x)+c$$
$$\frac{y^2}{x^2}=4\ln(x)+C \quad\Rightarrow\quad y^2=4x^2\ln(x)+C\,x^2$$

b) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{x^2}{y^2} \quad n=-2 \quad P(x)=\dfrac{-1}{x} \quad Q(x)=x^2$

$$1-n=3 \quad\Rightarrow\quad v=y^3$$
$$\frac{dv}{dx}-\frac{3}{x}v=3x^2 \quad\Rightarrow\quad u(x)=\frac{1}{x^3}$$
$$\frac{v}{x^3}=\int\frac{3}{x}dx=3\ln(x)+C$$
$$v=y^3=3x^3\ln(x)+C\,x^3$$
$$y^3=x^3\ln\left(x^3\right)+C\,x^3$$

2.34-a) $y=v\cdot x \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{v\cdot x+x}{v\cdot x-x}=\dfrac{v+1}{v-1}=F(v)$

$$\int\frac{1}{F(v)-v}dv=\int\frac{1}{x}dx \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{2}\ln\left(v^2-2v-1\right)=\ln(x)+c$$

Multiplions par –2 et prenons l'exponentielle : $v^2-2v-1=\dfrac{C}{x^2}$

$y^2 - 2x\,y - x^2 = C$

b) Cette équation n'est pas à variables séparables; elle n'est pas linéaire; elle n'est pas Bernoulli.

Elle est exacte : $(y+x)dx + (x-y)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (y+x)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (x-y)}{\partial x}$$

$$V(x,y) = \int (y+x)dx + k(y) = x\,y + \frac{1}{2}x^2 + k(y)$$

$$\frac{\partial\left(x\,y + \frac{1}{2}x^2 + k(y)\right)}{\partial y} = x + k'(y) \overset{doit}{=} x - y \quad \Rightarrow \quad k'(y) = -y \quad \Rightarrow \quad k(y) = \frac{-1}{2}y^2$$

$x\,y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = K$, qui est la même solution que celle obtenue avec homogène, mais changée de signe.

c) Cette équation est homogène : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2x}{y-2x}$

$$y = v\cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\cdot x + 2x}{v\cdot x - 2x} = \frac{v+2}{v-2} = F(v)$$

$$\int \frac{1}{F(v)-v}dv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{34}\left(\left(\sqrt{17}-17\right)\ln\left(2v - \sqrt{17} - 3\right) - \left(\sqrt{17}+17\right)\ln\left(2v + \sqrt{17} - 3\right)\right) = \ln(x) + C$$

$$\frac{\left(\sqrt{17}-17\right)\ln\left(\dfrac{2y - \left(\sqrt{17}+3\right)x}{x}\right) - \left(\sqrt{17}+17\right)\ln\left(\dfrac{2y + \left(\sqrt{17}-3\right)x}{x}\right)}{34} = \ln(x) + C$$

2.35-a) Considérons $\dfrac{dy}{dx} = u_1(x)y^2 + u_2(x)y + u_3(x)$, et posons le changement de variable $y = y_1(x) + \dfrac{1}{v}$, où $y_1(x)$ est une solution de l'équation de départ.

Alors, en dérivant le changement de variable, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1(x)}{dx} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$

On remplace dans l'équation initiale, en écrivant u_i au lieu de $u_i(x)$ et y_1 au lieu de $y_1(x)$, pour simplifier l'écriture :

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = u_1\cdot\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + u_2\cdot\left(y1 + \frac{1}{v}\right) + y_3$$

Mais $\dfrac{dy_1}{dx} = u_1 \cdot y_1{}^2 + u_2 \cdot y_1 + u_3$, puisque y_1 est une solution.

Donc $u_1 \cdot y_1{}^2 + u_2 \cdot y_1 + u_3 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{dv}{dx} = u_1 \cdot \left(y_1 + \dfrac{1}{v} \right)^2 + u_2 \cdot \left(y1 + \dfrac{1}{v} \right) + y_3$

Développons le membre de droite :

$$u_1 \cdot y_1{}^2 + u_2 \cdot y_1 + u_3 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = u_1 \cdot \left(y_1{}^2 + 2\frac{y_1}{v} + \frac{1}{v^2} \right) + u_2 \cdot \left(y1 + \frac{1}{v} \right) + y_3$$

$$u_1 \cdot y_1{}^2 + u_2 \cdot y_1 + u_3 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = u_1 \cdot y_1{}^2 + 2u_1\frac{y_1}{v} + u_1\frac{1}{v^2} + u_2 \cdot y1 + u_2\frac{1}{v} + y_3$$

On peut simplifier :

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 2u_1\frac{y_1}{v} + u_1\frac{1}{v^2} + u_2\frac{1}{v}$$

Ça va bien. On multiplie par $-v^2$:

$$\frac{dv}{dx} = -2u_1 \cdot y_1 \cdot v - u_1 - u_2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + \left(2u_1 \cdot y_1 + u_2 \right) \cdot v = -u_1$$

On a donc une équation linéaire avec $P(x) = 2u_1 \cdot y_1 + u_2$ et $Q(x) = -u_1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 2x\,y + \left(1 + x^2\right)$ est une équation de Riccati, avec $u_1 = 1$, $u_2 = -2x$ et $u_3 = 1 + x^2$

Vérifions que $y_1 = x$ est une solution :

$$\frac{dx}{dx} \stackrel{?}{=} x^2 - 2x \cdot x + 1 + x^2$$

Oui on a bel et bien $1 = x^2 - 2x^2 + 1 + x^2$, et $y_1 = x$ est une solution de l'équation différentielle.

Donc on peut poser le changement de variable $y = x + \dfrac{1}{v}$, ce qui nous amènera à

$$\frac{dv}{dx} + v \cdot \left(2 \cdot 1 \cdot x + (-2x) \right) = -1$$

$$\frac{dv}{dx} = -1 \quad \Rightarrow \quad v = -x + C$$

La solution générale est $y = x + \dfrac{1}{C - x}$

RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 2

Exercices de révision

2.36-a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-y\,e^x}{e^x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2}{e^x}-y \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{2x^2}{e^x}$

É. D. linéaire, avec $P(x)=1$ et $Q(x)=\dfrac{2x^2}{e^x}$

$\mu=e^{\int 1dx}=e^x \quad\Rightarrow\quad y\cdot e^x=\displaystyle\int \frac{2x^2}{e^x}\cdot e^x dx=\frac{2x^3}{3}+C$

$y=\dfrac{2}{3}x^3e^{-x}+Ce^{-x}$

b) $(x+2y)\,dx+x\,dy=0 \quad\Rightarrow\quad (x+2y)+x\dfrac{dy}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x+2y}{x}+\dfrac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow\quad 1+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{dy}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=-1$

É. D. linéaire, avec $P(x)=\dfrac{2}{x}$ et $Q(x)=-1$

$\mu=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2 \quad\Rightarrow\quad y\,x^2=\displaystyle\int -1\cdot x^2dx=\frac{-x^3}{3}+C$

$y=\dfrac{-x}{3}+\dfrac{C}{x^2}$

c) $x^2y\,dx+\left(1+x^3\right)dy=0$

les variables sont séparables : $\dfrac{x^2}{1+x^3}dx+\dfrac{1}{y}dy=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)+\ln(y)=c$

$\Rightarrow\quad \left(x^3+1\right)^{1/3}\cdot y=C \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{C}{\left(x^3+1\right)^{1/3}}$

d) $x\,y'+y=x^2$, avec $y(1)=2$

on divise par x : $y'+\dfrac{y}{x}=x$; cette É.D. est linéaire, avec $P(x)=\dfrac{1}{x}$ et $Q(x)=x$

$\mu=e^{\int \frac{1}{x}dx}=x \quad\Rightarrow\quad y\cdot x=\displaystyle\int x\cdot x\,dx=\frac{x^3}{3}+C$

$y(1)=2 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 1=\dfrac{1^3}{3}+C \quad\Rightarrow\quad C=\dfrac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad x\cdot y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{5}{3}$

$3x\,y=x^3+5$

e) $e^{2x-y}\,dx+e^{y-2x}\,dy=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2x}\,e^{-y}\,dx+e^{y}\,e^{-2x}\,dy=0$

É. D. à variables séparables : $\dfrac{e^{2x}e^{-y}}{e^{-2x}e^{-y}}dx+\dfrac{e^{y}e^{-2x}}{e^{-2x}e^{-y}}dy=0 \quad\Rightarrow\quad e^{4x}\,dx+e^{2y}\,dy=0$

$\Rightarrow\quad \dfrac{1}{4}e^{4x}+\dfrac{1}{2}e^{2y}=c \quad\Rightarrow\quad e^{4x}+2e^{2y}=C$

f) $\left(1+e^{\Theta}\right)d\rho+2\rho\,e^{2\Theta}d\Theta=0$

É. D. à variables séparables :

$\dfrac{1}{\rho}d\rho+\dfrac{2e^{2\Theta}}{1+e^{\Theta}}d\Theta=0 \quad\Rightarrow\quad \ln(\rho)+2e^{\Theta}-2\ln\left(e^{\Theta}+1\right)=C$

$\Rightarrow\quad 2e^{\Theta}+\ln\left(\dfrac{\rho}{\left(e^{\Theta}+1\right)^2}\right)=C$

g) $t^4\,\dfrac{d^3x}{dt^3}+1=0$

É. D. directement intégrable; il suffit d'isoler la dérivée :

$\dfrac{d^3x}{dt^3}=\dfrac{-1}{t^4}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{1}{3t^3}+k_1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-1}{6t^2}+k_1t+C_2 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{1}{6t}+\dfrac{k_1}{2}t^2+C_2t+C_3$

$x=\dfrac{1}{6t}+C_1t^2+C_2t+C_3$

h) $y''=0$, avec $y(0)=1$ et $y'(0)=2$

É. D. directement intégrable :

$y'=C_1;\quad y'(0)=2\Rightarrow C_1=2 \quad\Rightarrow\quad y'=2$

$y=2x+C_2;\quad y(0)=1\Rightarrow C_2=1 \quad\Rightarrow\quad y=2x+1$

i) $\left(x^2+1\right)\left(y^3-1\right)dx=x^2\,y^2\,dy$

É. D. à variables séparables : $\dfrac{x^2+1}{x^2}dx=\dfrac{y^2}{y^3-1}dy \quad\Rightarrow\quad x-\dfrac{1}{x}+C=\dfrac{1}{3}\ln\left(y^3-1\right)$

j) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2xt-x^4}{3t^2} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{2}{3t}x=\dfrac{-1}{3t^2}x^4$

É. D. de Bernoulli , avec $n=4$, $P_1(t)=\dfrac{-2}{3t}$ et $Q_1(t)=\dfrac{-1}{3t^2}$;

alors $1-n=-3$ et on pose $v=x^{-3}$

$P(t)=-3\cdot\dfrac{-2}{3t}=\dfrac{2}{t}$ et $Q(t)=-3\cdot\dfrac{-1}{3t^2}=\dfrac{1}{t^2}$

On a à résoudre $\frac{dv}{dt}+\frac{2}{t}v=\frac{1}{t^2}$, qui est linéaire.

$\mu=e^{\int \frac{2}{t}dt}=t^2 \quad \Rightarrow \quad v\cdot t^2=\int t^2\cdot\frac{1}{t^2}dt=t+C$

$v=\frac{1}{t}+\frac{C}{t^2} \quad \Rightarrow \quad x^{-3}=\frac{1}{t}+\frac{C}{t^2}$

k) $\left(e^y+x+3\right)y'=1$

Cette É. D. n'est pas à variables séparables, ni linéaire, ni Bernoulli, ni homogène.

On remplace donc $y'=\frac{dy}{dx}$, puis on multiplie par dx : $-dx+\left(e^y+x+3\right)dy=0$

$\frac{\partial}{\partial y}(-1)=0$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^y+x+3\right)=1$. Pas exacte; on cherche un facteur intégrant.

$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{1-0}{-1}=-1=g(y)$

$\mu=e^{\int -1dy}=e^{-y}$

$-e^{-y}\,dx+\left(1+x\,e^{-y}+3e^{-y}\right)dy=0$ est exacte.

$V(x,y)=\int -e^{-y}\,\partial x=-x\,e^{-y}+k(y)$

$x\,e^{-y}+k'(y)=1+x\,e^{-y}+3e^{-y} \quad \Rightarrow \quad k'(y)=1+3e^{-y}$ et $k(y)=y-3e^{-y}$

$-x\,e^{-y}+y-3e^{-y}=c \quad \Rightarrow \quad y\,e^y-3+C\,e^y=x$

l) $\frac{di}{dt}=-k(i-100t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt}+k\,i=100k\,t$

É. D. linéaire, avec $P(t)=k$ et $Q(t)=100k\,t$

$u(t)=e^{kt} \quad \Rightarrow \quad i\,e^{kt}=\int 100k\,t\,e^{kt}dt=100t\,e^{kt}-\frac{100}{k}e^{kt}+C$

$i=100t-\frac{100}{k}+C\,e^{-kt}$

$i(0)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=\frac{-100}{k}+C \quad \Rightarrow \quad C=\frac{100}{k}$

$i=100t-\frac{100}{k}+\frac{100}{k}e^{-kt}$

2.37-a) $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{s+t+1}$

Cette É. D. n'est pas à variables séparables, ni linéaire, ni Bernoulli, ni homogène.
Écrivons-la sous la forme différentielle :

$dt-(s+t+1)\,ds=0$

$$\frac{\partial M}{\partial s}=\frac{\partial(1)}{\partial s}=0 \quad \frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial(-s-t-1)}{\partial t}=-1$$

On va chercher un facteur intégrant.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial s}-\frac{\partial N}{\partial t}}{M}=\frac{0+1}{1}=1=g(s) \quad \Rightarrow \quad u(s)=e^{\int -g(s)ds}=e^{-s}$$

$$e^{-s}dt-(s+t+1)e^{-s}ds=0$$

$$V(t,s)=\int e^{-s}\cdot(-s-t-1)ds=e^{-s}\cdot(s+t+2)+c(t)$$

$$\frac{\partial\left(e^{-s}\cdot(s+t+2)+c(t)\right)}{\partial t}=e^{-s}+c'(t)\overset{doit}{=}e^{-s} \quad \Rightarrow \quad c'(t)=0$$

$$e^{-s}(s+t+2)=C$$

b) $y'=e^{y/x}+\frac{y}{x}$

É. D. homogène; on pose $v=\frac{y}{x}$

Alors $F(v)=e^{v}+v$

$$\int\frac{1}{F(v)-v}dv=\int\frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-v}=\ln(x)+c$$

$$e^{-v}+\ln(x)=C \quad \Rightarrow \quad e^{-y/x}+\ln(x)=C$$

c) En posant que $x>0$ et en divisant par x, on peut réécrire l'équation :

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$; cette équation est homogène, on pose $v=\frac{y}{x}$

Alors $F(v)=v+\sqrt{1+v^2}$

$$\int\frac{1}{F(v)-v}dv=\int\frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{v^2+1}+v\right)=\ln(x)+c$$

$$\sqrt{v^2+1}+v=C\cdot x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}+\frac{y}{x}=C\cdot x$$

$$\sqrt{y^2+x^2}+y=C\cdot x^2$$

d) équation de Bernoulli, $n=3 \quad P(t)=2t \quad Q(t)=t^3$

$$1-n=-2 \quad \Rightarrow \quad v=x^{-2}$$

$$\frac{dv}{dt}+(-2)\cdot 2t\,v=(-2)\cdot t^3 \quad \Rightarrow \quad u(t)=e^{-2t^2}$$

$$v \cdot e^{-2t^2} = \int -2t^3 e^{-2t^2}\, dt = \frac{2t^2+1}{4} e^{-2t^2} + C$$

$$v = \frac{1}{x^2} = \frac{2t^2+1}{4} + C\, e^{2t^2}$$

e) $\sqrt{1+x^3}\,\dfrac{dy}{dx} = x^2 y + x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+x^3}\,\dfrac{dy}{dx} = x^2\left(y+1\right)$

variables séparables : $\dfrac{1}{y+1}\,dy = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Les variables sont séparées; on intègre : $\ln\left(y+1\right) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C$

f) $y' = y\left(x+y\right) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} - x\,y = y^2$

équation de Bernoulli, $n = 2 \quad P\left(x\right) = -x \quad Q\left(x\right) = 1$

$1 - n = -1 \quad \Rightarrow \quad v = y^{-1}$

$\dfrac{dv}{dx} + x \cdot v = -1 \quad \Rightarrow \quad u\left(x\right) = e^{x^2/2}$

$v \cdot e^{x^2/2} = \int -e^{x^2/2}\, dx + C$ Pas de primitive simple.

$v = \dfrac{1}{y} = e^{-x^2/2} \int e^{x^2/2}\, dx + C\, e^{-x^2/2}$

g) $y' = x\left(x+y\right) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} - x\,y = x^2$

linéaire, avec $P\left(x\right) = -x$ et $Q\left(x\right) = x^2 \quad \Rightarrow \quad u\left(x\right) = e^{-x^2/2}$

$y \cdot e^{-x^2/2} = \int x^2\, e^{-x^2/2}\, dx + C$ Pas de primitive simple ici non plus.

$y = e^{x^2/2} \int x^2\, e^{-x^2/2}\, dx + C\, e^{x^2/2}$

h) $\left(t^2+s\right)ds + \left(2s\,t + t^2\right)dt = 0, \; s\left(3\right) = 0$

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(t^2+s\right) = 2t = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(2s\,t+t^2\right) = 2t$

l'équation est exacte.

$V\left(t,s\right) = \int\left(t^2+s\right)ds = t^2 s + \dfrac{s^2}{2} + c\left(t\right)$

$$\frac{\partial\left(t^2 s+\frac{s^2}{2}+c(t)\right)}{\partial t}=2t\,s+c'(t)\overset{doit}{=}2st+t^2 \quad\Rightarrow\quad c'(t)=t^2 \quad\Rightarrow\quad c(t)=\frac{t^3}{3}$$

solution générale : $t^2 s+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}t^3=C$

$s(3)=0 \quad\Rightarrow\quad 3^2 0+\frac{1}{2}0^2+\frac{1}{3}3^3=C \quad\Rightarrow\quad C=9$

$t^2 s+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}t^3=9$

i) $\frac{dy}{dx}=1-(x-y)^2$

Cette É. D. ne correspond à aucun des types étudiés dans ce chapitre. Il faut chercher un changement de variable.

On pose $v=x-y$; on calcule la dérivée : $\frac{dv}{dx}=1-\frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=1-\frac{dv}{dx}$.

Effectuons ce changement de variable : $1-\frac{dv}{dx}=1-v^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dx}=v^2$

Variables séparables : $\frac{1}{v^2}dv=dx \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{v}=x+C \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{x-y}=x+C$

$y(0)=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{0-1}=0+C \quad\Rightarrow\quad C=1$

$\frac{1}{y-x}=x+1 \quad\Rightarrow\quad (x+1)(y-x)=1$

j) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x-y}}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{y\,e^y}$

équation à variables séparables : $y\,e^y\,dy=e^x\,dx \quad\Rightarrow\quad (y-1)e^y=e^x+C$

k) $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(y^4\right)=4y^3 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\,y^3-1\right)=2y^3$

Cherchons un facteur intégrant.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{4y^3-2y^3}{y^4}=\frac{2}{y}=g(y) \quad\Rightarrow\quad u(y)=e^{\int -g(y)dy}=\frac{1}{y^2}$$

$y^2\,dx+\left(2x\,y-\frac{1}{y^2}\right)dy=0$ est exacte.

$V(x,y)=\int y^2\,dx=x\,y^2+k(y)$

$$\frac{\partial\left(x\,y^2+k(y)\right)}{\partial y}=2x\,y+k'(y)\overset{doit}{=}2x\,y-\frac{1}{y^2}\quad\Rightarrow\quad k'(y)=\frac{-1}{y^2}\quad\Rightarrow\quad k(y)=\frac{1}{y}$$

$$x\,y^2+\frac{1}{y}=C$$

l) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=4(1-x)$$

Nous sommes en présence d'une équation différentielle d'ordre 2 dans laquelle la fonction y n'apparaît pas. Posons $\frac{dy}{dx}=v$.

Ce changement de variable donne $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dv}{dx}$, et on peut écrire l'équation :

$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=4(1-x).$$

Équation linéaire avec $P(x)=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad u(x)=x$

$$v\cdot x=\int 4(1-x)\cdot x\,dx\quad\Rightarrow\quad v\cdot x=2x^2-\frac{4}{3}x^3+C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=v=2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{C_1}{x}$$

On peut évaluer la constante à l'aide de la première condition initiale :

$$y'(1)=0\quad\Rightarrow\quad 0=2\cdot 1-\frac{4}{3}\cdot 1^2+C_1\quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{-2}{3}$$

$$\frac{dy}{dx}=2x-\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3x}$$

Il reste seulement à intégrer pour obtenir y :

$$y=x^2-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}\ln(x)+C_2$$

Utilisons maintenant la deuxième condition initiale :

$$y(1)=3\quad\Rightarrow\quad 3=1^2-\frac{4}{9}1^3-\frac{2}{3}\ln(1)+C_2\quad\Rightarrow\quad C_2=\frac{22}{9}$$

$$y=x^2-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}\ln(x)+\frac{22}{9}$$

RETOUR AU DÉBUT DU CHAPITRE 2