Section optionnelle

On peut conclure en remarquant que toutes les équations différentielles rencontrées dans les chapitres 3 et 5 auraient pu se résoudre à l'aide des transformées de Laplace. Face à un problème d'application pratique, la **démarche de base** est la suivante:

1° A l'aide de lois ou règles physiques, donner une équation différentielle représentant ou modélisant le système à l'étude.

2° Prendre la transformée de Laplace de cette équation différentielle

3° Résoudre l'équation algébrique obtenue en 2° et ainsi trouver la transformée de la solution cherchée.

4° Prendre la transformée inverse de la solution trouvée en 3° pour avoir la solution dans le domaine du temps.

Dans certains cas, on peut simplifier une partie du travail nécessaire pour passer à travers les 4 étapes décrites plus haut. Pour terminer cette section je vais vous donner une introduction à certains aspects de **l'analyse des systèmes linéaires**.

6.3.2 Le circuit image

Dans un circuit électrique, une des règles de base (voir page 155) servant à trouver l'équation différentielle du circuit est la suivante:

$$\sum_{\substack{\text{sur un}\\ \text{chemin fermé}}} (\text{chutes de tension}) = 0$$

C'est ce qui nous permet d'écrire

$$L\frac{di}{dt} + Ri + v_c = v(t) \qquad \text{pour le circuit RLC de base.}$$

Pour obtenir une équation différentielle, on doit connaître les chutes de tension aux bornes de chacun des éléments du circuit. Comme on va ensuite prendre la transformée de Laplace de l'équation (et donc des chutes de tension), regardons tout de suite quelle est la transformée de Laplace de ces chutes de tension.

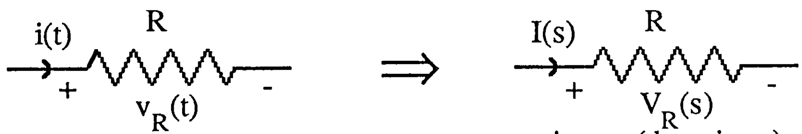
Pour simplifier, considérons toutes les conditions initiales nulles.

1° pour une résistance R

$$v_R = Ri(t)$$

$$\text{et } \mathcal{L}\{Ri(t)\} = RI(s)$$

Visuellement on aura:



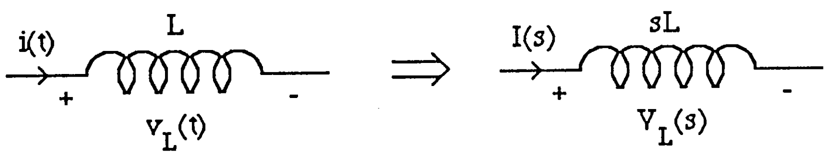
(domaine du temps) image (domaine s)

2° pour une bobine avec inductance L

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

$$\mathcal{L}\{v_L\} = V_L(s) = \mathcal{L}\left\{L\frac{di}{dt}\right\} = L[sI - i(0)]$$

$$= sLI(s) \quad \text{car } i(0) = 0.$$



3° pour un condensateur de capacitance C

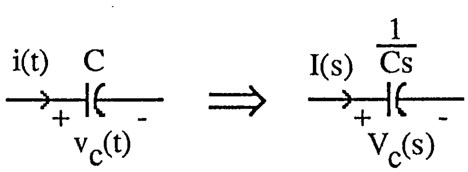
$$\text{on sait que } i(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

si on prend la transformée de Laplace de ce résultat, on aura

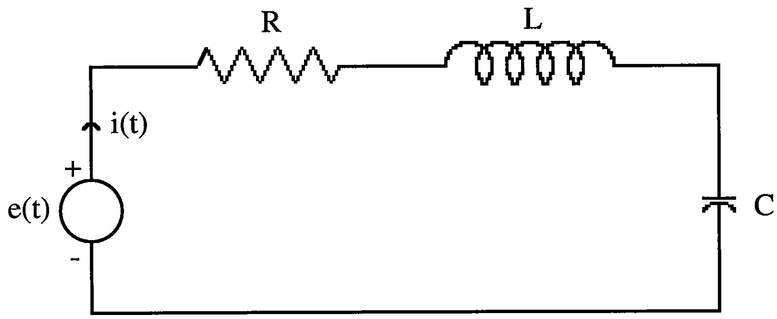
$$I(s) = C\mathcal{L}\left\{\frac{dv_c}{dt}\right\}$$

$$\text{donc } I(s) = C[sV_c(s) - vc(0)]$$
$$= s\,C\,V_c(s) \qquad \text{car } v_c(0) = 0.$$

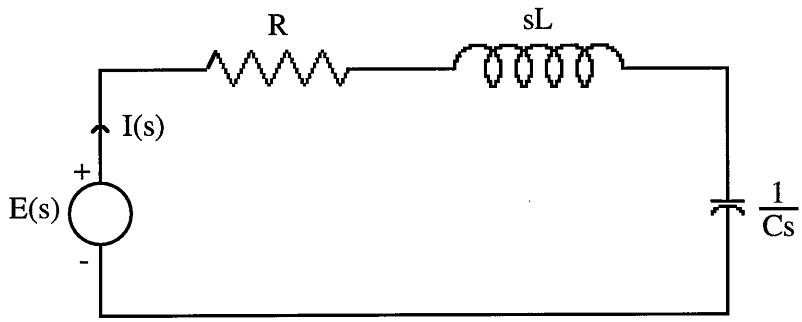
Visuellement on aura



Considérons maintenant le circuit suivant:



Son circuit image sera:



En regardant le premier circuit et en se servant des règles vues aux chapitres 3 et 6, on peut dire que

$$Ri + L\frac{di}{dt} + v_c = v(t)$$

et ensuite éliminer soit i soit v_c pour obtenir une équation différentielle avec 1 fonction inconnue.

Par la suite, on prend la transformée de Laplace de cette équation et on suit la démarche indiquée à la page 188.

Ce que la notion de circuit image nous permet de faire, c'est d'obtenir directement dans le domaine s l'équation algébrique à résoudre. En d'autres mots, on n'a pas à obtenir en premier lieu l'équation différentielle. On aura donc

$$RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = V(s)$$

$$\Rightarrow \left[R + sL + \frac{1}{Cs}\right] I(s) = V(s)$$

Si on prend $L = 0.5H$, $R = 6$, $C = 0.02F$ et $v(t) = 24 \sin 10t$ pour $t \geq 0$

avec $v_c(0) = 0$ et $i(0) = 0$.

On aura $\left[6 + 0.5s + \frac{1}{0.02s}\right] I(s) = \frac{240}{s^2+100}$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{240}{s^2+100} * \frac{1}{0.5s+6+\frac{50}{s}}$$

$$= \frac{480}{s^2+100} * \frac{s}{s^2+12s+100}$$

$$= \frac{480s}{(s^2+100)(s^2+12s+100)}$$

En posant $\frac{480s}{(s^2+100)(s^2+12s+100)} = \frac{As+B}{s^2+100} + \frac{Cs+D}{s^2+12s+100}$

on trouve: $(As+B)(s^2+12s+100) + (Cs+D)(s^2+100) = 480s$

$$(A+C)s^3 + (B+12A+D)s^2 + (100A+12B+100C)s + (100B+100D) = 480s$$

$A + C = 0 \Rightarrow A = -C$

$100B + 100D = 0 \Rightarrow D = -B$

$B + 12A + D = 0 \Rightarrow B + 12A - B = 12A = 0$. Donc $A = 0$ et $C = 0$.

$100A + 12B + 100C = 480 \Rightarrow 12B = 480$. Donc $B = 40$ et $D = -40$.

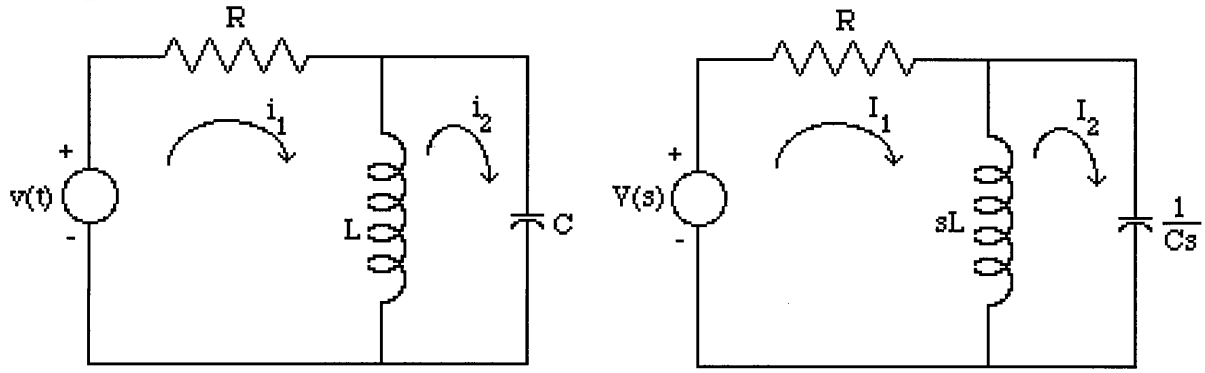
Donc $I(s)\ \frac{40}{s^2+100} - \frac{40}{s^2+12s+100}$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{40}{s^2+100} - \frac{40}{(s+6)^2+64}\right\}$$

$$\Rightarrow i(t) = 4\sin 10t - 5e^{-6t}\sin 8t$$

Le circuit image nous évite donc d'avoir à écrire une équation différentielle et d'avoir ensuite à prendre sa transformée de Laplace. Je rappelle que les résultats donnés sont valides pour des circuits avec conditions initiales nulles. On peut cependant adapter cette technique si les conditions initiales ne sont pas nulles. De plus, le principe du circuit image s'applique à des circuits à plus d'une boucle; on obtient alors directement la transformée de Laplace d'un système d'équations différentielles.

Exemple:



En respectant les règles de la page 155, on aura:

$$RI_1(s) + sLI_1(s) - sLI_2(s) = V(s)$$

$$-sLI_1(s) + sLI_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) = 0$$

Sous forme matricielle, cela donne:

$$\begin{bmatrix} R+sL & -sL \\ -sL & sL+\frac{1}{Cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

système que l'on peut résoudre avec les techniques de la section précédente.

6.3.3 Fonction de transfert

Dans ce chapitre , nous avons étudié deux systèmes linéaires de base, à savoir le circuit RLC et le mouvement harmonique produit par une masse suspendue à un ressort. Dans le domaine du temps, les deux équations différentielles correspondant à ces deux systèmes sont:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

et $$Ri + L\frac{di}{dt} + v_c = v(t)$$

En supposant les conditions initiales nulles et en prenant la transformée de Laplace de chacune de ces équations, on aura:

Pour le *mouvement harmonique*:

$$ms^2X + \beta sX + kX = F(s)$$

$$\underbrace{\left[ms^2 + \beta s + k\right]}_{A}\ \underbrace{X(s)}_{B} = \underbrace{F(s)}_{C} \qquad \textbf{(1)}$$

Pour le *circuit RLC*:

$$\underbrace{\left[R + sL + \frac{1}{Cs}\right]}_{A}\underbrace{X(s)}_{B} = \underbrace{F(s)}_{C} \qquad \textbf{(2)}$$

Dans les deux cas, on retrouve une propriété intéressante: l'équation se décompose en trois parties.

Partie A: caractéristique du système à l'étude.

Partie B: correspond à la **réponse** (ou l'**output**)

Partie C: correspond à la **source** (ou l'**input**)

Cette décomposition est caractéristique de tout système linéaire. On remarque que le système d'équations à la fin de la section 6.3.2 est aussi de cette nature.

Maintenant si à partir de l'équation **(1)** on forme le rapport

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+\beta s+k}$$

la fonction $\frac{1}{ms^2+\beta s+k}$ caractérise le système harmonique et est indépendante de la transformée de Laplace de la force extérieure, c'est-à-dire de F(s).

De même avec le circuit électrique,

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R+sL+\frac{1}{Cs}}$$

est indépendante de la source appliquée et caractérise le circuit.

> On appellera ce rapport la **<u>fonction de transfert,</u>** notée G(s). Plus formellement,
>
> $$G(s) \equiv \frac{\mathcal{L}\{\text{output}\}}{\mathcal{L}\{\text{input}\}}$$

Pour le circuit RLC,

$$G(s) = \frac{1}{R+sL+\frac{1}{Cs}} \tag{3}$$

Symboliquement:

$$\xrightarrow[\text{input}]{V(s)} \boxed{\frac{1}{R+sL+\frac{1}{Cs}}} \xrightarrow[\text{output}]{I(s)}$$

Si je veux connaître la réponse i(t) dans un circuit RLC avec une source v(t) appliquée, alors

$$I(s) = G(s)\,V(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{R+sL+\frac{1}{Cs}} \cdot V(s)$$

Il ne nous restera qu'à prendre la transformée inverse pour trouver i(t). Si on veut plutôt trouver $v_c(t)$, alors en se rappelant que

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s), \text{ on aura}$$

$$V_c(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} V(s)$$

et à ce moment,

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

Lorsqu'on connaît la fonction de transfert d'un système linéaire, on peut aisément calculer la réponse du système à plusieurs inputs différents. En effet, comme

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{\text{output}\}}{\mathcal{L}\{\text{input}\}}$$

alors $\mathcal{L}\{\text{output}\} = G(s)\ \mathcal{L}\{\text{input}\}$.

Exemple: Pour un circuit RLC donné, on a une fonction de transfert (obtenue à l'aide de **(3)**) valant $G(s) = \dfrac{0.1}{s^2+2s+101}$

a) si $v(t) = 12u(t)$ c'est-à-dire 12 volts si $t > 0$, alors

$$I(s) = G(s) \cdot V(s)$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{0.1}{s^2+2s+101} \cdot \frac{12}{s}$$

b) si $v(t) = 10 \sin 5t$, alors

$$V(s) = \frac{50}{s^2+25}$$

$$\text{et } I(s) = \frac{5}{(s^2+2s+101)(s^2+25)}$$

Il y a deux cas intéressants à noter:

> **A-** Si $v(t) = \delta(t)$ c'est-à-dire si l'input (ou la source) est une impulsion alors $V(s) = 1$
>
> et $V_c(s) = G(s)\cdot 1 = G(s)$ de sorte que $v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
>
> C'est la **réponse impulsionnelle**.

La réponse impulsionnelle se trouve donc en prenant la transformée inverse de la fonction de transfert.

B- Si $f(t) = u(t)$ c'est-à-dire $v(t) = 1,\ t > 0$

alors $V(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow V_c(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s}$

et $v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$

C'est la **<u>réponse indicielle</u>**.

On remarque que dans ce cas-ci, en se servant de la propriété P 23

$$\int_0^t g(u)\,du \qquad \text{où } g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Donc la réponse indicielle peut s'obtenir en intégrant de 0 à t la réponse impulsionnelle.

<u>Remarque:</u> on pourrait faire un raisonnement semblable avec $v(t) = V_1u(t)$, où V_1 est une constante!

Finalement, à l'inverse de ce que l'on vient de faire, si nous connaissons la réponse indicielle ou impulsionnelle d'un circuit, on peut en déduire la fonction de transfert par les remarques précédentes. En effet si la réponse indicielle pour un circuit est (on considère $v(t) = u(t)$)

$$v_c(t) = 12 - 12e^{-3t}$$

$$\text{alors } \frac{G(s)}{s} = \mathcal{L}\left\{12-12e^{-3t}\right\} = \frac{12}{s} - \frac{12}{s+3} = \frac{12s+36-12s}{s(s+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{G(s)}{s} = \frac{36}{s(s+3)}$$

6.3.4 Les pôles et les zéros.

Comme je l'avais indiqué au début de ce chapitre, on considère s comme une variable complexe. Lorsqu'on travaille avec la transformée de Laplace, on manipule en général des polynômes en s. Si j'ai un polynôme de degré n en s, à coefficients réels, alors ce dernier possède n racines qui sont soit réelles soit complexes. Je rappelle que les racines complexes viennent par paires: si 2+3j est une racine, alors 2-3j est aussi une racine.

Exemple: Soit $F(s) = \dfrac{5(s+3)}{s(s^2+4)}$

Le numérateur a une racine en s=-3

Le dénominateur a 3 racines: 0, 2j et -2j.

On dira que F(s) a un zéro en s = -3 et a trois pôles en s = 0, 2j et -2j.

De façon plus rigoureuse, on aura

> **Définition:** On dit que F(s) a un **pôle d'ordre n** en $s = s_0$ si
>
> $$\lim_{s \to s_0} F(s) = \infty$$
>
> et si $\lim_{s \to s_0} (s-s_0)^n F(s)$ existe et $\neq 0$

Exemple: **a)** Soit $F(s) = \dfrac{2(s-2)}{(s+1)(s+2)^2}$

Alors F(s) a un pôle simple en s = -1 et un pôle double en s = -2.

b) Soit $F(s) = \dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2(s^2+2s+2)}$

$s^2+2s+2 = 0 \Rightarrow s = -1 \pm j$

Donc F(s) a un pôle simple en

$s = -2 \quad s = -1+j \quad s = -1-j$

Définition: On dit que F(s) a un **zéro d'ordre n** en $s = s_0$ si $\frac{1}{F(s)}$ a un pôle d'ordre n en $s = s_0$.

En général, les zéros de F(s) correspondent aux racines du numérateur et les pôles de F(s) correspondent aux racines de son dénominateur. Cette règle est valide à condition d'avoir simplifié au maximum F(s).

Exemple: **a)** $F(s) = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2(s^2+2s+2)}$

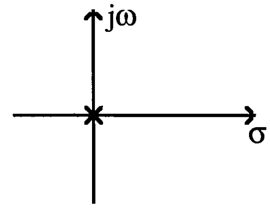
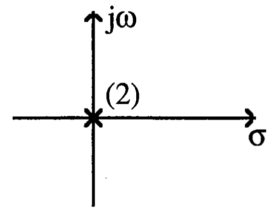
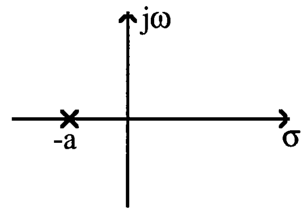
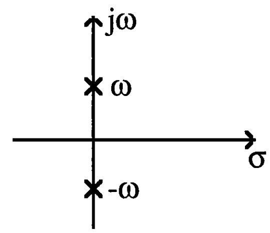
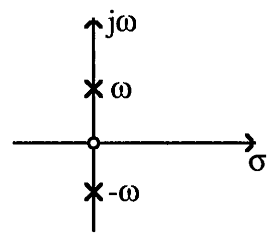
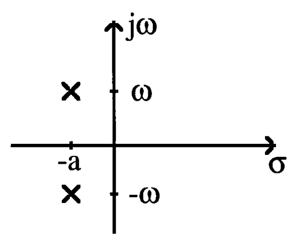
après simplification, $F(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

et on voit que F(s) n'a pas de zéros.

b) $F(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+2)}$

F(s) a un zéro en $s = -3$ et deux pôles en $s = 0$ et $s = -2$.

Il est intéressant de mettre les pôles et les zéros d'une fonction F(s) dans un plan complexe et de voir le lien qui existe entre ces valeurs et la fonction dans le domaine du temps. Le tableau suivant donne quelques fonctions de base avec leur transformée de Laplace et les diagrammes de pôles et zéros qui y correspondent:

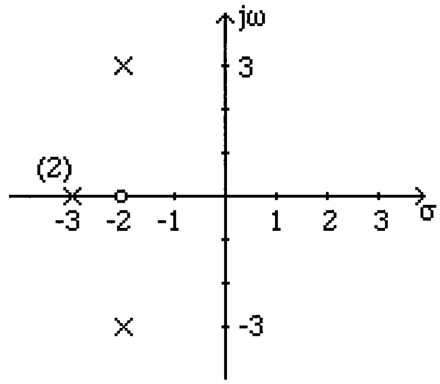
f(t)	F(s)	diagramme dans le plan s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	

Dans les diagrammes précédents, un pôle est indiqué à l'aide d'un X et un zéro à l'aide de o vis-à-vis le point concerné. De plus si on a un zéro ou un pôle d'ordre n > 1, alors l'ordre est indiqué entre parenthèses près du point en question (voir f(t) = t)

Exemple: Soit $F(s) = \dfrac{K(s+2)}{(s+3)^2(s^2+4s+13)}$ $K \in \mathbb{R}$

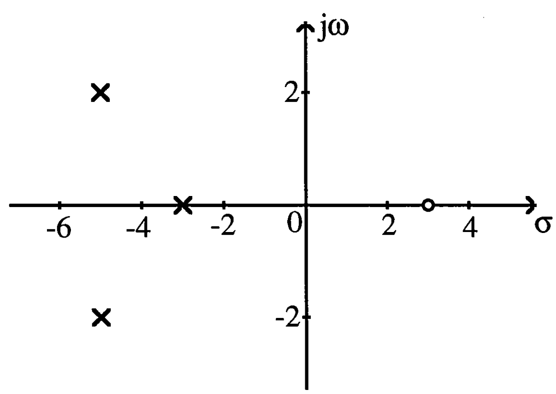
F(s) a
- un zéro en $s = -2$
- un pôle double en $s = -3$
- deux pôles simples en $s = -2 \pm 3j$

Son diagramme dans le plan s sera:



A l'inverse de l'exemple précédent, si on a le diagramme des pôles et zéros d'une fonction F(s), on peut reconstruire, à une constante multiplicative près, cette dernière!

Exemple:



$$\text{Donc } F(s) = \frac{K(s-3)}{(s+3)(s+5+2j)(s+5-2j)} = \frac{K(s-3)}{(s+3)(s^2+10s+29)}$$

Si on a une information de plus sur F(s), par exemple F(0) = 1, alors on peut calculer la valeur de K et déterminer complètement F(s). En effet on aura

$$F(0) - \frac{-3K}{3 \times 29} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = -29$$

$$\text{Donc } F(s) = \frac{-29(s-3)}{(s+3)(s^2+10s+29)}$$

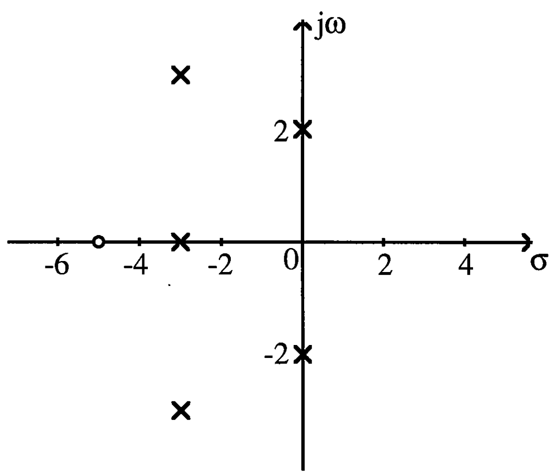
L'analyse de pôles et des zéros d'une fonction F(s) est très utile car elle permet d'obtenir un aperçu rapide de la réponse dans le domaine du temps.

<u>Exemple</u>: Que peut-on dire de f(t) si on a $F(s) = \frac{2(s+5)}{(s+3)(s^2+4)(s^2+6s+18)}$

Normalement pour trouver f(t), on décompose F(s) en fractions partielles. Ici on aura $F(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4} + \frac{Ds+E}{(s+3)^2+9}$

Les pôles de F(s) sont: -3, $\pm 2j$ et $-3 \pm 3j$.

On aura le diagramme suivant:



Par les remarques précédentes, f(t) sera composée des termes

e^{-3t}, sin 2t, cos 2t, e^{-3t} sin 3t et e^{-3t} cos 3t.

Les zéros de F(s) n'influencent pas le comportement dans le temps du type de réponse qu'on obtient mais influencent l'amplitude et l'angle de phase (lorsqu'applicable) des signaux de réponses.

Si on a un pôle dans la partie droite du plan complexe, s > 0, alors on aura un terme e^{at} ou e^{at}sin t avec $a > 0$ et f(t) augmente sans contrainte. On dit que la réponse, et donc le *système, est instable.*

Si on a des pôles sur l'axe imaginaire, alors la *réponse sera oscillatoire* (non-amortie). Ces termes font partie du régime permanent.

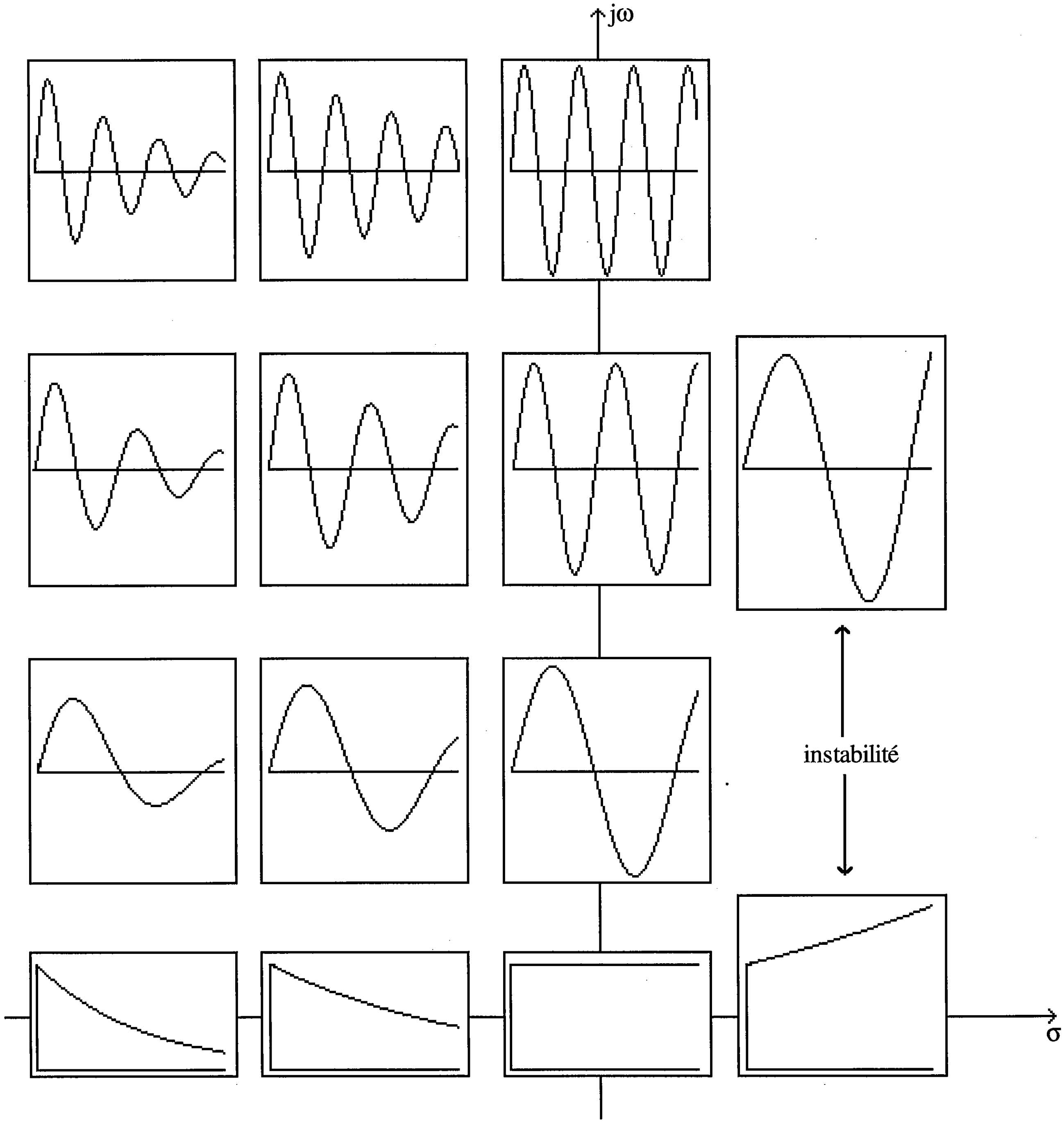
Si on a un pôle sur l'axe réel négatif, alors il lui correspond un terme e^{-at}, $a > 0$. Ce terme disparaît éventuellement et correspond à la *phase transitoire de la réponse*.

Les pôles à gauche de l'axe imaginaire avec partie complexe non nulle correspondent à des signaux sinusoïdaux amortis qui disparaissent éventuellement et font partie de la *phase transitoire de la réponse.*

On peut aisément voir que l'emplacement des pôles peut nous renseigner sur la fréquence des signaux générés par les fonctions du temps leur correspondant et peut nous renseigner sur la durée de la phase transitoire.

En effet, plus le pôle est loin de l'axe réel, plus la fréquence du signal augmente. De même, plus la partie réelle est loin (à gauche) de l'axe imaginaire, plus la durée significative du signal sera courte. Vous trouverez à la page suivante une figure qui illustre, selon l'emplacement des pôles, le type de réponse qui y correspond.

Le tableau de la page suivante illustre bien l'utilité de l'analyse des pôles d'une fonction pour nous permettre d'avoir rapidement une idée du type de réponse dans le domaine du temps.


jω
instabilité
σ